Beiträge zur Untersuchung der harmonischen Kovarianten zweier Kegelschnitte und verwandter Kurven.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

vorgelegt von

Charlotte Platen

aus Eilenburg (Provinz Sachsen).

Halle (Saale)
Buchdruckerei Hohmann
1920.

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1920.

Meinen Eltern!

Einleitung.

Auf die harmonische Kovariante zweiter Art zweier Kegelschnitte hat zuerst J. Thomae hingewiesen in seiner Abhandlung „Ueber die harmonische Kovariante zweier Kegelschnitte“.[1]) Man versteht unter dieser Kurve den geometrischen Ort aller derjenigen Punkte, von denen aus man an zwei gegebene Kegelschnitte vier Tangenten legen kann, die einen harmonischen Strahlenbüschel bilden der Art, daß zwei Tangenten an verschiedene Kegelschnitte konjugierte Elemente sind. Sind dagegen zwei Tangenten an denselben Kegelschnitt einander zugeordnet, dann erhält man als geometrischen Ort die harmonische Kovariante erster Art der beiden Grundkegelschnitte. Sie ist ein Kegelschnitt und ist in der mathematischen Literatur bekannt unter den Namen „kovarianter Kegelschnitt“[2]), „v. Staudtsche Kurve zweiter Ordnung“, „harmonische Kurve zweiter Ordnung“.[3]) In der Formen- und Invariantentheorie werden Kovarianten zweier ternären Formen behandelt als algebraische Ausdrücke; doch ist, soviel ich weiß, in den geometrischen Anwendungen nirgends eine Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse der durch das Verschwinden dieser Formen dargestellten Kurven höherer Ordnung zu finden. Die Bedingungen dafür, daß die Tangentenquadrupel an zwei Kegelschnitte die oben erwähnten beiden Arten des Doppelverhältnisses bilden, also die Gleichungen der beiden harmonischen Kovarianten, finden sich in dem Thomaeschen Aufsatz: „Ueber die

---

[1]) Berichte über die Verhandl. d. königl. sächs. Gesellsch. d. W. zu Leipzig, 1917. Bd. 69, S. 461.

[2]) Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Kegelschnitte II, 7. Aufl. Leipzig 1918, S. 233.

[3]) Gundelfinger-Dingeldey, Vorlesungen aus d. anal. Geom. d. Kegelschnitte, Leipzig 1895, S. 146.

Encyclopädie der math. Wissenschaften III, C 1, 1903, S. 92.

äquianharmonische Kovariante zweier Kegelschnitte".[1]) Thomae selbst behandelt in der zuerst angeführten Abhandlung und in einer zweiten „Ueber die harmonischen Kovarianten zweier Kegelschnitte" [2]) den Fall, daß die Grundkegelschnitte wenigstens zwei imaginäre Schnittpunkte haben, und den weiteren, daß ein Kegelschnitt und zwei feste Punkte gegeben sind. Kurz bevor die vorliegende Arbeit in Druck gegeben wurde, erschien ein weiterer letzter Aufsatz von Thomae: „Die harmonische Kovariante zweiter Art für zwei Kegelschnitte mit vier reellen Schnittpunkten".[3])

Herr Geheimer Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer machte mich auf die zuerst genannten Arbeiten aufmerksam, und es war mein Bestreben, das auch Herr Geheimer Rat Professor Dr. Thomae bei einer persönlichen Rücksprache guthieß, einige besondere Fälle der Diskussion zu unterziehen. In der vorliegenden Arbeit werden die harmonischen Kovarianten untersucht für zwei konzentrische kongruente Ellipsen, deren Hauptachsen einen rechten Winkel mit einander bilden, für Ellipse und Hyperbel mit gemeinsamem Mittelpunkt, deren Hauptachsenrichtungen übereinstimmen, und für zwei konzentrische Hyperbeln, deren Hauptachsen Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems sind. Der allgemeine Fall zweier Grundkegelschnitte mit vier reellen Schnittpunkten schließt einen Teil der folgenden Ausführungen in sich. Ich hielt eine Betrachtung nach den obigen Gesichtspunkten für zweckmäßig, weil mir daran lag, wirklich die Gestalt der Kurven für die verschiedenen Lagen der Kegelschnitte zu einander festzustellen. Deshalb ist es die Hauptaufgabe des ersten Teiles dieser Arbeit, mit Hilfe der aus der Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung bekannten Hilfsmittel die gefundenen Kurvengleichungen möglichst genau zu diskutieren. Es stellt sich dabei heraus, daß die Gestalt der harmonischen Kovariante zweiter Art wesentlich bedingt ist durch das Verhältnis der Achsen der Kegelschnitte zu einander, daß es in einzelnen Fällen keinen Punkt der Ebene gibt, von dem aus man ein einen harmonischen Strahlenbüschel erster oder zweiter Art bildendes reelles Tangentenquadrupel an die beiden Grundkegel-

---

[1]) Berichte über die Verhandl. d. königl. sächs. Gesellsch. d. W. zu Leipzig, 1912. Bd. 64, S. 446.

[2]) Leipziger Berichte 1918. Bd. 70, S. 289.

[3]) Leipziger Berichte 1919. Bd. 71, S. 286.

schnitte legen kann, und daß unter gewissen Bedingungen die harmonische Kovariante zweiter Art in zwei Kegelschnitte zerfällt. Zur Kontrolle der Ergebnisse wird die Polargleichung der Kurven aufgestellt und untersucht, und schließlich wird eine Parameterdarstellung gebraucht, die, wenn es das Geschlecht der Kurve, das in einzelnen Fällen bis drei ansteigt, erlaubt, auf rationale oder elliptische Funktionen führt. Infolge der Veröffentlichung der letztgenannten Arbeit von Thomae war es möglich, den ersten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung wesentlich zu kürzen.

Der zweite Teil der Arbeit bringt einige allgemeine Betrachtungen über Kovarianten und ihr Verhältnis zu ebenen Kurven vierter Ordnung. Insbesondere werden die von Thomae gefundenen Ausdrücke als Spezialfälle einer allgemeinen Gleichung dargestellt. Alle Kovarianten sind Individuen eines Büschels von Kurven vierter Ordnung, dem auch die beiden Grundkegelschnitte angehören. Umgekehrt läßt sich für eine Kurve vierter Ordnung feststellen, in welchem Doppelverhältnis vier Tangenten von einem ihrer Punkte an zwei bestimmte Kegelschnitte stehen. Für jede Kovariante vom Doppelverhältnis d läßt sich ein „charakteristischer Wert“ finden, der für die Gestalt der Kurve von ausschlaggebender Bedeutung ist.

Analoge Betrachtungen in Linienkoordinaten führen auf Kontravarianten zweier Kegelschnitte, Kurven vierter Klasse. In einigen Kegelschnittbüscheln von besonderer Lage gehören die Kovarianten und Kontravarianten diesen Büscheln als Kurven an, und es lassen sich Gleichungen aufstellen, aus denen man die Beziehungen der einzelnen Kurven der betreffenden Büschel zu einander berechnen kann. Für gewisse Bedingungen, denen die Achsen der Grundkegelschnitte genügen müssen, werden Kovarianten und Kontravarianten als zu einander polarreziproke Kurven gefunden.

Abschnitt I.

Drei Fälle der harmonischen Kovarianten zweier Kegelschnitte.

§ 1.

Die Grundkegelschnitte sind zwei konzentrische kongruente Ellipsen, deren Achsen um 90^0 gegen einander gedreht sind.

Die Achsen der Ellipsen seien als Koordinatenachsen gewählt, ihr gemeinsamer Mittelpunkt als Koordinatenanfang, dann sind die Gleichungen dieser beiden Grundkegelschnitte:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \text{ und } a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

oder in Linienkoordinaten:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0 \text{ und } b^2u^2 + a^2v^2 - 1 = 0.$$

Mit Hilfe der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ wird v eliminiert, sodaß sich zwei quadratische Gleichungen mit nur je einer Unbekannten ergeben:

$$u^2(a^2y^2 + b^2x^2) + 2b^2ux + b^2 - y^2 = 0,$$
$$u^2(b^2y^2 + a^2x^2) + 2a^2ux + a^2 - y^2 = 0.$$

Die Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art[1]) der beiden Grundkegelschnitte hat dann folgende Form:

(1) $(x^4 + y^4)[-(a^4 + b^4) + 34a^2b^2] + 2x^2y^2[17(a^4 + b^4) - 2a^2b^2]$
$+ (x^2 + y^2)[2(a^6 + b^6) - 34a^2b^2(a^2 + b^2)] + 34a^4b^4 - (a^8 + b^8) = 0$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve vierter Ordnung verläuft symmetrisch in bezug auf beide Koordinatenachsen und auch symmetrisch in bezug auf die Winkelhalbierenden des Koordinatensystems.

---

[1]) Leipziger Berichte, 1912. Bd. 64, S. 447.
„ „ 1918. Bd. 70, S. 322.

Wird $a = b = r$, d. h. fallen die beiden Ellipsen zu einem Kreise zusammen, dann ist dieser selbe Kreis, doppelt gezählt, zugleich seine harmonische Kovariante.[1])

Die Schnittpunkte der Kovariante mit der x-Achse erhalten wir aus der folgenden Gleichung, in der $x^2 = \xi$ gesetzt ist:

$$\xi^2 [-(a^4 + b^4) + 34\, a^2 b^2] + \xi [2(a^6 + b^6) - 34\, a^2 b^2 (a^2 + b^2)] + 34\, a^4 b^4 - (a^8 + b^8) = 0 .$$

$$\xi = \frac{a^6 + b^6 - 17\, a^2 b^2 (a^2 + b^2) \pm 12 \sqrt{2}\, a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^4 + b^4 - 34\, a^2 b^2} .$$

Die Gleichung liefert gleichzeitig die Schnittpunkte der Kovariante mit der y-Achse. Setzen wir also $y^2 = \eta$, so gilt:

$$\eta = \frac{a^6 + b^6 - 17\, a^2 b^2 (a^2 + b^2) \pm 12 \sqrt{2}\, a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^4 + b^4 - 34\, a^2 b^2}$$

Es ist nun zu untersuchen, ob alle vier Schnittpunkte mit jeder der beiden Koordinatenachsen immer reell sind. Die Länge der Hauptachsen der Ellipsen sei $2a$, die der Nebenachsen $2b$, also $a > b$. Diese Festsetzung ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn durch eine Vertauschung der beiden Größen a und b würde nur die eine Ellipsengleichung in die andere übergeführt, während die aus beiden kombinierte Kovariantengleichung denselben Wert behielte. Man erkennt die Richtigkeit dieser letzten Behauptung auch aus dem Ausdruck für ξ. Eine Differenz von Potenzen von a und b tritt nur einmal auf, als $(a^2 - b^2)$, und zwar mit doppeltem Vorzeichen, sodaß durch eine Vertauschung der Bezeichnungen nur ξ_1 in ξ_2 übergeführt würde und umgekehrt. Dabei ist:

$$\xi_1 = \frac{a^6 + b^6 - 17 a^2 b^2 (a^2 + b^2) - 12 \sqrt{2}\, a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^4 + b^4 - 34 a^2 b^2} = \frac{a^4 - b^4 (17 - 12 \sqrt{2})}{a^2 - b^2 (17 - 12 \sqrt{2})} ,$$

(2)

$$\xi_2 = \frac{a^6 + b^6 - 17 a^2 b^2 (a^2 + b^2) + 12 \sqrt{2}\, a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a^4 + b^4 - 34 a^2 b^2} = \frac{a^4 - b^4 (17 + 12 \sqrt{2})}{a^2 - b^2 (17 + 12 \sqrt{2})} .$$

---

[1]) Vgl. Leipziger Berichte 1919. Bd. 71, S. 303.

Unter Einführung der von Thomae vorgeschlagenen Bezeichnungen:[1])

$\varepsilon_1 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\varepsilon_1^{-1} = 3 + 2\sqrt{2}$ oder: $\varepsilon_1 = \tau^{-2}$, $\varepsilon_1^{-1} = \tau^2$ [2]) nehmen die Ausdrücke folgende Form an:

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{a^4 - \varepsilon_1^2 b^4}{a^2 - \varepsilon_1^2 b^2} = \frac{a^4 - \tau^{-4} b^4}{a^2 - \tau^{-4} b^2},$$

(2a)

$$\xi_2 = \eta_2 = \frac{a^4 - \varepsilon_1^{-2} b^4}{a^2 - \varepsilon_1^{-2} b^2} = \frac{a^4 - \tau^4 b^4}{a^2 - \tau^4 b^2}.$$

Da nach Voraussetzung $a^2 > b^2$ ist, so sind zur Untersuchung der Realität der Schnittpunkte die Fälle zu betrachten:

I. $b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-1} b^2$,

II. $a^2 = \varepsilon_1^{-1} b^2$,

III. $\varepsilon_1^{-1} b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-2} b^2$,

IV. $a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$,

V. $a^2 > \varepsilon_1^{-2} b^2$.

Im Falle I ist $\xi_1 > O$, $\xi_2 > O$,
im Falle III ist $\xi_1 > O$, $\xi_2 < O$,
im Falle V ist $\xi_1 > O$, $\xi_2 > O$.

Im Falle II ist $a^2 = \varepsilon_1^{-1} b^2$, also:

$$34 a^4 b^4 - (a^8 + b^8) = -(a^4 - \varepsilon_1^2 b^4)(a^4 - \varepsilon_1^{-2} b^4) = 0 .$$

Demnach nimmt die Gleichung (1) der harmonischen Kovariante zweiter Art die Form an:

$$(x^4 + y^4)[-(a^4 + b^4) + 34 a^2 b^2] + 2x^2 y^2 [17(a^4 + b^4) - 2a^2 b^2] + (x^2 + y^2)[2(a^6 + b^6) - 34 a^2 b^2 (a^2 + b^2)] = 0.$$

Setzt man darin $a^2 = \varepsilon_1^{-1} b^2$, so ergibt sich nach Unterdrückung des Faktors $4 \cdot \varepsilon_1^{-1} b^4$:

(1a) $$7(x^4 + y^4) + 50 x^2 y^2 - 12\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) b^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

Der Koordinatenanfang ist im Falle II ein isolierter Doppelpunkt der Kurve. Die Kurventangenten in diesem Punkte sind die beiden isotropen Geraden [3]) oder Minimalgeraden [4]) $y = \pm ix$.

---

[1]) Leipziger Berichte, 1918. Bd. 70, S. 296.

[2]) Leipziger Berichte, 1919. Bd. 71, S. 289.

[3]) Wieleitner, Algebraische Kurven I, Neue Bearbeitung, Berlin und Leipzig 1914, S. 49.

[4]) Encyclopädie III. C 1. 1903, S. 25.

Im Falle IV ist $a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$, demnach:

$$-(a^4 + b^4) + 34\, a^2 b^2 = -(a^2 - \varepsilon_1^{2} b^2)(a^2 - \varepsilon_1^{-2} b^2) = 0.$$

Die Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art hat folgende Gestalt:

$$2x^2 y^2 [17(a^4 + b^4) - 2a^2 b^2] + (x^2 + y^2)[2(a^6 + b^6) - 34 a^2 b^2 (a^2 + b^2] + 34\, a^4 b^4 - (a^8 + b^8) = 0.$$

Nach Unterdrückung des Faktors $32\, \varepsilon_1^{-2} b^4$ findet man beim Einsetzen des Wertes $a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$:

$$(1b) \qquad 36 x^2 y^2 + 6\, \varepsilon_1^{-1} b^2 (x^2 + y^2) - 35\, \varepsilon_1^{-2} b^4 = 0.$$

Die Gleichung stimmt überein mit der von Thomae in seiner letzten Abhandlung gefundenen (146), wenn man setzt: $R^2 = \varepsilon_1^{-1} b^2$.[1])

Aus der homogen gemachten Kurvengleichung erkennt man, daß der erste und zweite Kardinalpunkt[2]) der Kurve als Doppelpunkte angehören. Und zwar sind es isolierte Doppelpunkte, denn wir werden später sehen,[3]) daß die Kurve nur für $a^2 > \varepsilon_1^{-2} b^2$ reelle Asymptoten haben kann. Die Ergebnisse lassen sich tabellarisch folgendermaßen zusammenstellen:

	Größe der Achsen	Schnittpunkte mit jeder der Koordinatenachsen.	
I.	$b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-1} b^2$	4 reelle Schnittpunkte	
II.	$a^2 = \varepsilon_1^{-1} b^2$	2 „ „ „	1 isolierter Doppelpunkt
III.	$\varepsilon_1^{-1} b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-2} b^2$	2 „ „ „	2 imaginäre Schnittpkte.
IV.	$a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$	2 „ „ „	1 isolierter Doppelpunkt
V.	$a^2 > \varepsilon_1^{-2} b^2$	4 „ „ „	

Die harmonische Kovariante zweiter Art hat also eine verschiedene Gestalt, je nachdem das Verhältnis der Ellipsenachsen zu einander beschaffen ist.

Es wird natürlich der Symmetrie wegen auch die Anzahl der reellen Schnittpunkte der Kurve mit den Winkelhalbierenden in den fünf Fällen verschieden sein. Setzt man $x = \pm y$ in Gleichung (1) ein, so ergibt sich:

---

[1]) Leipzig. Ber. 1919. Bd. 71, S. 296.

[2]) Reuschle, Praxis der Kurvendiskussion I, Stuttgart 1886. S. 51.

[3]) Siehe S. 13.

$$x^2 - \frac{-(a^4+b^4)+18a^2b^2 \pm 3(a^2-b^2)^2}{16(a^2+b^2)},$$

$$(8) \qquad x_1^2 = \frac{(a^2+b^2)^2+4a^2b^2}{8(a^2+b^2)}, \qquad x_2^2 = \frac{-(a^2-b^2)^2+4a^2b^2}{4(a^2+b^2)}.$$

Die Vorzeichen von x_1^2 und x_2^2 erkennt man aus der Tabelle:

	Größe der Achsen	x_1^2	x_2^2	Schnittpunkte mit jeder Winkelhalbierenden.	
I.	$b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-1}b^2$	>0	>0	4 reelle Schnittpunkte	
II.	$a^2 = \varepsilon_1^{-1}b^2$	>0	0	2 „ „ „	1 isolierter Doppelpunkt
III.	$\varepsilon_1^{-1}b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-2}b^2$	>0	<0	2 „ „ „	2 imaginäre Schnittpunkte
IV.	$a^2 = \varepsilon_1^{-2}b^2$	>0	<0	2 „ „ „	2 imaginäre Schnittpunkte
V.	$a^2 > \varepsilon_1^{-2}b^2$	>0	<0	2 „ „ „	2 imaginäre Schnittpunkte

Die Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden liegen auf zwei Kreisen mit den Radien:

$$r_1 = \sqrt{2x_1^2} = \sqrt{\frac{4a^2b^2+(a^2+b^2)^2}{4(a^2+b^2)}},$$

$$r_2 = \sqrt{2x_2^2} = \sqrt{\frac{4a^2b^2-(a^2-b^2)^2}{2(a^2+b^2)}},$$

wo $r_2 = 0$ ist im Falle II und imaginär in den Fällen III, IV, V. In den reellen Schnittpunkten mit den Winkelhalbierenden stehen die Tangenten an die Kurve senkrecht zu diesen Geraden; sie bilden also mit der x-Achse einen Winkel von $\pm 45°$.

Zur Bestimmung der Gestalt und Lage der harmonischen Kovariante zweiter Art dienen noch folgende Betrachtungen: Da sich in allen Fällen vier reelle Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden und zwei reelle Schnittpunkte mit jeder der Koordinatenachsen ergeben, muß es immer einen Zweig der Kurve geben, dem diese Punkte angehören. Er verläuft ganz außerhalb der beiden Grundellipsen, da die Koordinaten dieser Schnittpunkte größer sind als die der entsprechenden Ellipsenpunkte, und da Grundkegelschnitte und harmonische Kovariante zweiter Art keine reellen

Schnittpunkte haben. Die stets vorhandenen Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden haben die Koordinaten:[1])

$$x_1^2 = y_1^2 = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2}{8(a^2+b^2)} .$$

Die entsprechenden Punkte der Ellipsen sind bestimmt durch:

$$x^2 = y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2 + 4a^2b^2 - (a^2-b^2)^2}{8(a^2+b^2)} .$$

Es ist also $x_1^2 > x^2$ und $y_1^2 > y^2$.

Für die Schnittpunkte mit den Achsen, die immer reell sind, war gefunden[2]):

$$\xi_1 = \eta_1 = \frac{a^4 - \varepsilon_1^2 b^4}{a^2 - \varepsilon_1^2 b^2} = a^2 \frac{a^2 - \frac{b^4}{a^2}\varepsilon_1^2}{a^2 - \varepsilon_1^2 b^2} .$$

Demnach ist $\xi_1 = \eta_1 > a^2$, denn:

$$0 < \varepsilon_1^2 < 1 \text{ und } a^2 > b^2 .$$

Der in allen fünf Fällen vorhandene Zweig der harmonischen Kovariante zweiter Art liegt also ganz außerhalb der Ellipsen. Die in den Fällen I und V auftretenden andern Kovariantenzweige müssen entweder ganz innerhalb oder ganz außerhalb der Grundkegelschnitte verlaufen. Die Entscheidung darüber liefern die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und den Winkelhalbierenden. Es ist:[2])

$$\xi_2 = \eta_2 = \frac{a^4 - \varepsilon_1^{-2} b^4}{a^2 - \varepsilon_1^{-2} b^2} = b^2 \frac{\frac{a^4}{b^2} - \varepsilon_1^{-2} b^2}{a^2 - \varepsilon_1^{-2} b^2} .$$

Im Falle I ist $b^2 < a^2 < \varepsilon_1^{-1} b^2$, also $\frac{a^4}{b^2} > a^2$, und weil $\varepsilon_1^{-2} > 1$ ist, findet man $\xi_2 = \eta_2 < b^2$.

Für die Schnittpunkte mit den Winkelhalbierenden gilt:

$$x_2^2 < x^2, \qquad y_2^2 < y^2.$$

Im Falle I verläuft also der zweite Zweig der Kovariante ganz in dem von den beiden Ellipsen gemeinsam begrenzten Raum; die harmonische Kovariante zweiter Art ist eine Ring- oder Gürtelkurve.[3]) Von dem inneren Kurvenzuge aus sind aber keine reellen Tangenten an die Grundkegelschnitte möglich.

---

[1]) Siehe S. 8.
[2]) Siehe S. 6.
[3]) Siehe Figur 1.

Im Falle V dagegen verläuft der zweite Zweig ganz außerhalb der Ellipsen [1]) und auch außerhalb des ersten Zweiges der Kovariante, denn es ist:

$$\xi_2 > \xi_1 > a^2, \quad \eta_2 > \eta_1 > a^2.$$

Die Schnittpunkte dieses Kurvenzuges mit den Winkelhalbierenden sind imaginär.

Zur Bestimmung der Wendepunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} A &= 34a^2b^2 - (a^4 + b^4) = -(a^2 - \varepsilon_1^{\,2}b^2)(a^2 - \varepsilon_1^{-2}b^2), \\ B &= 34(a^4 + b^4) - 4a^2b^2, \\ C &= 2(a^6 + b^6) - 34a^2b^2(a^2 + b^2), \\ D &= 34a^4b^4 - (a^8 + b^8) = -(a^4 - \varepsilon_1^{\,2}b^4)(a^4 - \varepsilon_1^{-2}b^4). \end{aligned} \tag{4}$$

Dann hat die homogen gemachte Kurvengleichung folgende Gestalt:

$$A(x_1^4 + x_2^4) + B x_1^2 x_2^2 + C(x_1^2 + x_2^2) x_3^2 + D x_3^4 = 0 = \varphi(x_1, x_2, x_3). \tag{1c}$$

Die Hessesche Determinante wird danach:

$$H(\varphi) = 2^6 \begin{vmatrix} 3x^2A + y^2\frac{B}{2} + \frac{C}{2} & xyB & xC \\ xyB & 3y^2A + x^2\frac{B}{2} + \frac{C}{2} & yC \\ xC & yC & (x^2 + y^2)\frac{C}{2} + 3D \end{vmatrix},$$

und nach Unterdrückung des Faktors 2^6 ergibt sich als Gleichung der Hesseschen Kurve: [2])

$$\begin{aligned} (5)\quad & 2BC^2x^2y^2 - C^2x^2\left(3Ay^2 + \frac{B}{2}x^2 + \frac{C}{2}\right) - C^2y^2\left(3Ax^2 + \frac{B}{2}y^2 + \frac{C}{2}\right) \\ & + \left[(x^2 + y^2)\frac{C}{2} + 3D\right]\left[\frac{3AB}{2}(x^4 + y^4) + x^2y^2\left(9A^2 - \frac{3B^2}{4}\right)\right. \\ & \left. + (x^2 + y^2)\frac{C}{2}\left(3A + \frac{B}{2}\right) + \frac{C^2}{4}\right] = 0. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Grundgleichung:

$$f(x, y) = A(x^4 - y^4) + B x^2y^2 + C(x^2 - y^2) + D = 0$$

findet man als Gleichung, durch die die Wendepunkte der Kovariante bestimmt sind, die folgende:

[1]) Siehe Figur 3.

[2]) Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Leipzig. 1905, S. 58.

$$(6)\ \frac{3}{C}\left(A^2-\frac{B^2}{4}\right)x^2y^2(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\left(A-\frac{3B}{2}\right)(x^4+y^4)+\frac{18D}{C^2}$$
$$\left(A^2-\frac{B^2}{4}\right)x^2y^2-\left(3A-\frac{B}{2}\right)x^2y^2+\left[\frac{3D}{C}(A-B)-\frac{C}{4}\right]$$
$$(x^2+y^2)+D\left(\frac{1}{2}-\frac{3BD}{C^2}\right)=0.$$

Im Falle IV ist $A=0$, und man erhält infolgedessen die beiden Gleichungen:

$$B\,x^2y^2+C(x^2+y^2)+D=0,$$
$$B(x^4+y^4)+C(x^2+y^2)-4B\,x^2y^2-\left(x^2+y^2+\frac{6D}{C}\right)\left[-\frac{3B^2}{4C}x^2y^2\right.$$
$$\left.+(x^2+y^2)\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right]=0,$$

deren Kombination nach Unterdrückung überflüssiger Faktoren die Werte liefert:

$$(6a)\ x^2+y^2=-\frac{2D}{3C}\quad,\qquad x^2y^2=-\frac{D}{3B}$$

Die Wendepunkte liegen mithin auf einem Kreise vom Radius

$$R=\sqrt{-\frac{2D}{3C}}$$

mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt und auf zwei gleichseitigen Hyperbeln, für die die Gleichungen bestehen:

$$xy=\pm\sqrt{-\frac{D}{3B}}\ .$$

Beim Einsetzen der Größe $a^2=\varepsilon_1{}^2b^2$ findet man folgende Werte:

$$x^2+y^2=R^2=35\,\frac{\varepsilon_1{}^{-1}b^2}{9}\ ^1),$$
$$x^2y^2=35\,\frac{\varepsilon_1{}^{-2}b^4}{108}=\frac{R^2\varepsilon_1{}^{-1}b^2}{12}\ .$$

Der Kreis und die beiden Hyperbeln schneiden einander in acht reellen Punkten, sodaß im Falle IV acht reelle Wendepunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art vorhanden sind. Im Falle II ist $D=0$; es ergeben sich also die Gleichungen

$$A(x^4+y^4)+B\,x^2y^2+C(x^2+y^2)=0,$$

---

1) Vgl. Leipz. Ber. 1919. Bd. 71, S. 299.

$$B(x^4+y^4)+C(x^2+y^2)+(12A-4B)x^2y^2-(x^2+y^2)\left[\frac{3AB}{2C}(x^4+y^4)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{9A^2}{C}-\frac{3B^2}{4C}\right)x^2y^2+\left(\frac{3A}{2}+\frac{B}{4}\right)(x^2+y^2)+\frac{C}{4}\right]=0$$

und als Kombination beider:

(6b) $$AB(B^2-4A^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)-2AC(B^2-4A^2)(x^4+y^4)$$
$$-C^2(3B^2-4AB-8A^2)(x^2+y^2)=0.$$

Der Koordinatenanfang gehört ebenfalls als isolierter Doppelpunkt der Hesseschen Kurve an. Die weiteren gemeinsamen Punkte von Hessescher Kurve und Grundkurve ergeben sich aus den Gleichungen:

$$x^2+y^2=R^2=\frac{\sqrt{3}\cdot C}{\pm\sqrt{A(B+2A)}},$$

$$xy=\pm\frac{C\sqrt{3A+\sqrt{3A(B+2A)}}}{\sqrt{A(4A^2-B^2)}}.$$

Die acht reellen Wendepunkte liegen also wieder auf einem Kreise und zwei gleichseitigen Hyperbeln, für die nach Einsetzen des Wertes $a^2=\varepsilon_1^{-1}b^2$ die Gleichungen bestehen:

$$x^2+y^2=R^2=3\sqrt{\frac{3}{14}}\cdot b^2\cdot\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}},$$

$$xy=\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{8}{14}}-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)b^2\varepsilon_1^{-\frac{1}{2}}.$$

Es läßt sich nachweisen, daß auch in den Fällen I, III, V acht reelle Wendepunkte vorhanden sind.

Die Kurve hat demnach stets die Maximalzahl der Wendepunkte, die eine Quartik besitzen kann.[1])

Zur Bestimmung der Asymptoten[2]) der harmonischen Kovariante zweiter Art dient folgende Gleichung:

$$(1+m^4)[34a^2b^2-(a^4+b^4)]+m^2[34(a^4+b^4)-4a^2b^2]=0,$$

$$m^2=\frac{2a^2b^2-17(a^4+b^4)\pm12\sqrt{2}(a^4-b^4)}{34a^2b^2-(a^4+b^4)}.$$

Wegen $a^2>b^2$ ist $[2a^2b^2-17(a^4+b^4)]<0$ und
$|12\sqrt{2}(a^4-b^4)|<|2a^2b^2-17(a^4+b^4)|$.

[1]) Zeuthen, Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Mathem. Annalen. VII. 1874, S. 410.

[2]) Sauerbeck — De Gua, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Heft XV. Leipzig 1902.

Es kann demnach m^2 nur positiv sein, wenn der Nenner negativ ist, d. h. also nur für Werte $a^2 > \varepsilon_1^{-2} b^2$. Nur im Falle V gibt es reelle Asymptoten.[1]) Sie gehen durch den Koordinatenanfang, und die Winkel, die sie mit der x— Achse bilden, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} tg\,\varphi_1 = m_1 &= \pm \sqrt{\frac{2a^2b^2 - \varepsilon_1^{\,2} a^4 - \varepsilon_1^{\,-2} b^4}{34a^2b^2 - (a^4 + b^4)}}, \\ tg\,\varphi_2 = m_2 &= \pm \sqrt{\frac{2a^2b^2 - \varepsilon_1^{\,-2} a^4 - \varepsilon_1^{\,2} b^4}{34a^2b^2 - (a^4 + b^4)}}. \end{aligned}$$

Will man die gemeinsamen Punkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten feststellen, so genügt es, das für eine der Ellipsen zu untersuchen, weil der vollständigen Symmetrie wegen dann auch die entsprechenden Punkte für die andere Ellipse bestimmt sind. Für die Punkte, in denen Kovariante und Ellipsen übereinstimmen, findet man die Koordinaten:

$$(8) \qquad \begin{aligned} x &= \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ x &= \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Sie liegen auf einem Kreis um den Koordinatenanfang als Mittelpunkt mit dem Radius r, wo

$$(8a) \qquad r^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2} \quad \text{ist.}$$

Zum Beweise, daß die gefundene Kurve wirklich die gesuchte harmonische Kovariante zweiter Art ist, denken wir uns etwa im Falle IV vom zweiten Kardinalpunkt, der ja als isolierter Doppelpunkt der Kurve angehört, Tangenten an die Grundkegelschnitte gezogen. Die Berührungspunkte liegen sämtlich auf der x— Achse und sind bestimmt durch die Abszissen:

$$x_1 = a, \qquad x_2 = -a, \qquad x_3 = -b, \qquad x_4 = b.$$

Sollen diese Punkte ein harmonisches Elementarsystem zweiter Art darstellen, so müssen sie der Gleichung genügen:

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = 2x_1x_3 + 2x_2x_4.$$

Da $a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$ ist, ist diese Gleichung in der Tat identisch erfüllt, und man kommt zu dem Ergebnis:

---

[1]) Siehe Figur 3.

Genügen die Achsen zweier kongruenten um 90° gegen einander gedrehten Ellipsen mit demselben Mittelpunkt der Bedingung $a^2 = (3+2\sqrt{2})^2 b^2$, *so sind die auf derselben Koordinatenachse liegenden Ellipsenscheitel im harmonischen Doppelverhältnis, und je ein Hauptscheitel und ein Nebenscheitel sind zugeordnete Elemente.*

Die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten sind zugleich Punkte der harmonischen Kovariante erster Art.[1]) Ihre Gleichung ist:

(9) $(b^2x^2 + a^2y^2)(a^2 - y^2) + (a^2x^2 + b^2y^2)(b^2 - y^2) - 2a^2b^2x^2 = 0$

oder (10) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (a^4 + b^4) = 0.$

Diese Gleichung stellt denselben Kreis dar, der durch die Berührungspunkte geht.[2])

Man kommt also zu folgendem Ergebnis:

In jedem Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundellipsen sind nur zwei Tangenten an diese möglich. Diese Geraden sind Doppeltangenten erster Art[3]) *der harmonischen Kovariante zweiter Art.*

Um zu einer Parameterdarstellung der harmonischen Kovariante zweiter Art zu gelangen, sei zunächst das Geschlecht[4]) der Kurve in den fünf betrachteten Fällen festgestellt. Da Rückkehrpunkte nie auftreten, so läßt sich nach der Plückerschen Formel $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ die folgende Tabelle aufstellen:

	n	d	p
I	4	0	3
II	4	1	2
III	4	0	3
IV	4	2	1
V	4	0	3

Weil die Kurve niemals drei Doppelpunkte besitzt, ist auf keinen Fall eine rationale Parameterdarstellung möglich. Im

[1]) Leipziger Berichte . 1918 . S. 291.

[2]) Siehe S. 13

[3]) Zeuthen, a. a. O.

[4]) Wieleitner, a. a. O. S. 71.

Salmon — Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven. Leipzig 1882. S. 39.

Falle IV läßt sich die Kurve, da sie vom Geschlechte 1 ist, eindeutig mit Hilfe elliptischer Funktionen darstellen.

Man kann sich die harmonische Kovariante zweiter Art, deren ursprüngliche Gleichung die Form hat:

$$36\,(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)\,(a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2) - [a^4 + b^4 - (x^2 + y^2)\,(a^2 + b^2)]^2 = 0,$$

erzeugt denken durch zwei einander projektiv zugeordnete Kegelschnittbüschel, deren Gleichungen sind:

$$\begin{aligned} &6\,(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2) - \lambda\,[a^4 + b^4 - (a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2)] = 0, \\ &6\lambda\,(a^2b^2 - a^2x^2 - b^2y^2) - [a^4 + b^4 - (a^2 + b^2)\,(x^2 + y^2)] = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Grundpunkte dieser Büschel sind die Schnittpunkte der beiden Grundellipsen mit dem Kreise vom Radius $r = \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{a^2 + b^2}}$; es sind also die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten. Um x und y als Funktionen des Parameters λ zu finden, ordnen wir die Gleichungen folgendermaßen um:

$$x^2\,[\lambda\,(a^2 + b^2) - 6b^2] + y^2\,[\lambda\,(a^2 + b^2) - 6a^2] + 6a^2b^2 - \lambda\,(a^4 + b^4) = 0,$$
$$x^2\,[(a^2 + b^2) - 6\lambda a^2] + y^2\,[(a^2 + b^2) - 6\lambda b^2] + 6\lambda a^2b^2 - (a^4 + b^4) = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $(a^2 + b^2 - 6\lambda b^2)$ und subtrahiert davon die mit $[\lambda\,(a^2 + b^2) - 6a^2]$ multiplizierte zweite Gleichung, so findet man nach Division mit überflüssigen Faktoren:

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sqrt{\frac{a^4 - 6\lambda a^2b^2 + \lambda^2b^4}{1 - 6\lambda + \lambda^2}}\,. \tag{12a}$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich für y der folgende Ausdruck:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sqrt{\frac{b^4 - 6\lambda a^2b^2 + \lambda^2a^4}{1 - 6\lambda + \lambda^2}}\,; \tag{12b}$$

x und y sind durch diese Gleichungen als irrationale Funktionen des Parameters λ dargestellt.

Für $\lambda = 0$ und $\lambda = \infty$ erhält man die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten; die Koordinaten der Schnittpunkte der Kurve mit der x- bezw. y-Achse findet man, wenn der Parameter die Werte annimmt:

$$\lambda_1 = \frac{b^2}{a^2}\,(3 \pm 2\sqrt{2}) \text{ und } \lambda_2 = \frac{a^2}{b^2}\,(3 \pm 2\sqrt{2})\,.$$

Gibt man λ den reziproken Wert, so gehen die x-Werte in die früheren y-Werte über und umgekehrt. Für $\lambda = \pm 1$ ergeben sich die Schnittpunkte der Kovariante mit den Winkelhalbierenden

des Koordinatensystems, für $\lambda = \varepsilon_1$ oder $\lambda = \varepsilon_1^{-1}$ wird $x = \infty$ und $y = \infty$. Die Richtungen nach den unendlich fernen Punkten erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{b^4 - 6\lambda a^2 b^2 + \lambda^2 a^4}{a^4 - 6\lambda a^2 b^2 + \lambda^2 b^4}} .$$

Setzt man darin $\lambda = 3 \pm 2\sqrt{2}$, so hat die Gleichung die Form:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{b^4 - 6(3 \pm 2\sqrt{2})\, a^2 b^2 + (3 \pm 2\sqrt{2})^2 a^4}{a^4 - 6(3 \pm 2\sqrt{2})\, a^2 b^2 + (3 \pm 2\sqrt{2})^2 b^4}} .$$

Nur wenn $a^2 > \varepsilon_1^{-2} b^2$ ist, ist der Radikand positiv; es gibt, wie schon früher gezeigt wurde, nur im Falle V reelle Asymptoten.

Ist $a^2 = \varepsilon_1^{-2} b^2$, dann ist der Quotient für $\lambda = \varepsilon_1$ von der Form:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{1 - 6\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1^{-2}}{\varepsilon_1^{-4} - 6\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1^{2}}} = 0 .$$

Ist dagegen $\lambda = \varepsilon_1^{-1}$, dann findet man:

$$\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{1 - 6\varepsilon_1^{-3} + \varepsilon_1^{-6}}{\varepsilon_1^{-4} - 6\varepsilon_1^{-3} + \varepsilon_1^{-2}}} = \infty .$$

Im Falle IV gehören demnach der erste und zweite Kardinalpunkt der harmonischen Kovariante zweiter Art an.[1])

Um nun auf eine Darstellung mit Hilfe elliptischer Funktionen zu kommen, muß man folgende Identitäten benutzen:

$$1 - 6\lambda + \lambda^2 = (1 - \varepsilon_1^{-1}\lambda)(1 - \varepsilon_1\lambda) \cdot (\lambda - \varepsilon_1^{-1})(\lambda - \varepsilon_1) ,$$
$$a^4 - 6\lambda a^2 b^2 + \lambda^2 b^4 = (\lambda b^2 - \varepsilon_1^{-1} a^2)(\lambda b^2 - \varepsilon_1 a^2) ,$$
$$b^4 - 6\lambda a^2 b^2 + \lambda^2 a^4 = (\lambda a^2 - \varepsilon_1^{-1} b^2)(\lambda a^2 - \varepsilon_1 b^2) .$$

Dann lassen sich die Gleichungen für x und y[2]) folgendermaßen umschreiben:

$$x = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{[\lambda - \varepsilon_1^{-1}\frac{a^2}{b^2}]\ [\lambda - \varepsilon_1 \frac{a^2}{b^2}]}{[1 - \varepsilon_1^{-1}\lambda]\ \ [1 - \varepsilon_1\lambda]}} ,$$

$$y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sqrt{\frac{[\lambda \frac{a^2}{b^2} - \varepsilon_1^{-1}]\ [\lambda \frac{a^2}{b^2} - \varepsilon_1]}{[1 - \varepsilon_1^{-1}\lambda]\ \ [1 - \varepsilon_1\lambda]}} .$$

Im allgemeinen läßt sich diese Parameterdarstellung nicht vereinfachen. Ist aber (Fall IV) $\frac{a^2}{b^2} = \varepsilon_1^{-2}$, dann kann man durch

---

[1]) Siehe S. 7.
[2]) Siehe S. 15.

elliptische Funktionen eine wesentliche Vereinfachung herbeiführen. Es ist dann nämlich:

$$x = \frac{b}{\sqrt{6}} \sqrt{(3+2\sqrt{2})^3} \sqrt{\frac{1-\lambda(3-2\sqrt{2})^3}{1-\lambda(3+2\sqrt{2})}},$$

$$y = b \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} \sqrt{\frac{1-\lambda(3+2\sqrt{2})^3}{1-\lambda(3-2\sqrt{2})}}.$$

Wir setzen: $(3-2\sqrt{2})^2 \lambda = \mu$ oder $\lambda = (3+2\sqrt{2})^2 \mu$ und führen die elliptischen Funktionen ein:

$$\begin{aligned}
\mu(3+2\sqrt{2})^3 &= \lambda(3+2\sqrt{2}) = sn^2u, \\
\lambda(3+2\sqrt{2})^3 &= \mu(3+2\sqrt{2})^5 = sn^2w, \\
\mu(3-2\sqrt{2}) &= \lambda(3-2\sqrt{2})^3 = K^2 sn^2u, \\
\lambda(3-2\sqrt{2}) &= \mu(3+2\sqrt{2}) = \overline{K}^2 sn^2w,
\end{aligned} \tag{13}$$

$$K^2 = (3-2\sqrt{2})^4 = \overline{K}^2 = \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^4} = \varepsilon_1^4,$$

dann ergeben sich folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{b}{\sqrt{6}} \sqrt{(3+2\sqrt{2})^3} \sqrt{\frac{1-K^2sn^2u}{1-sn^2u}} = \frac{b}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{2})^3 \frac{dn\,u}{cn\,u} = x(u), \\
y &= \sqrt{\frac{b}{6(3+2\sqrt{2})}} \sqrt{\frac{1-sn^2w}{1-K^2sn^2w}} = \frac{b}{\sqrt{6}}(\sqrt{2}-1)\frac{cn\,w}{dn\,w} = y(w).
\end{aligned} \tag{14}$$

Dabei haben die elliptischen Funktionen $sn\,u$ und $sn\,w$ denselben Modul K[1]):

$$K = (3-2\sqrt{2})^2 = \varepsilon_1^2 = sin\,1^0 41' 12,''75.$$

Die Amplituden sind verschieden, stehen aber miteinander in Beziehung, denn es ist:

$$sn\,u = \sqrt{\lambda}(1+\sqrt{2}), \qquad sn\,w = \sqrt{\lambda}(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}),$$

$$sn\,w = (3+2\sqrt{2})\,sn\,u = \varepsilon_1^{-1}\,sn\,u,$$

$$K\,sn^2w = sn^2u.$$

Außerdem lassen sich noch die Gleichungen aufstellen:

$$cn^2w = 1 - sn^2w = 1 - (3+2\sqrt{2})^2\,sn^2u = 1 - \frac{1}{K}sn^2u,$$

$$dn^2w = 1 - K^2sn^2w = 1 - (3-2\sqrt{2})^2\,sn^2u = 1 - K\,sn^2u.$$

---

[1]) Leipziger Berichte, 1917. S. 471.

Polargleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art. Ist ϱ der Radiusvektor eines Kurvenpunktes und φ der Winkel, den dieser mit der x-Achse bildet, dann lautet die Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art, wenn man die früheren Bezeichnungen [1]) benutzt, in Polarkoordinaten:

$$(15) \quad A\varrho^4\left(1-\frac{\sin^2(2\varphi)}{2}\right)+B\frac{\varrho^4}{4}\sin^2(2\varphi)+C\varrho^2+D=0,$$

$$\varrho_1^2=\frac{-C+\sqrt{C^2-4D\left[A-\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{4}\right)\sin^2(2\varphi)\right]}}{2A-\left(A-\frac{B}{2}\right)\sin^2(2\varphi)},$$

$$(15a) \quad \varrho_2^2=\frac{-C-\sqrt{C^2-4D\left[A-\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{4}\right)\sin^2(2\varphi)\right]}}{2A-\left(A-\frac{B}{2}\right)\sin^2(2\varphi)\Big]}.$$

Im Falle II ist $D=0$, also haben die Radienvektoren folgende Größen:

$$\varrho_1^2=0, \qquad \varrho_2^2=\frac{-2C}{2A-\left(A-\frac{B}{2}\right)\sin^2(2\varphi)}.$$

Da $a^2 \dots b^2$ ist, so ist $\left[2A-\left(A-\frac{B}{2}\right)\sin^2(2\varphi)\right]>0$, $C<0$. Es wird also $\varrho_2^2>0$; mithin ergibt sich ein reeller Zweig der Kurve, während der andere zu dem isolierten Punkt im Koordinatenanfang zusammengeschrumpft ist. $\sin^2(2\varphi)$ nimmt seinen größten Wert an für $\varphi=\frac{\pi}{4}$, d. h. die Schnittpunkte der Kurve mit den Winkelhalbierenden haben den kürzesten Abstand vom Mittelpunkt. Es wird ϱ_2^2 am größten für $\varphi=\frac{k\pi}{2}$; die Schnittpunkte mit den Achsen sind also am weitesten vom Mittelpunkt entfernt. Diese Maximalwerte sind bestimmt durch die Gleichung: $\varrho_2^2=-\frac{C}{A}$. Das Ergebnis stimmt überein mit dem Werte von x^2 bezw. y^2, wenn man in der früheren Gleichung [2]) für den Fall II $x=0$ bezw. $y=0$ setzt.

In diesem besonderen Falle II läßt sich die Quadratur der Kurve einfach ausführen. Man erhält das Integral:

[1]) Siehe S. 10. [2]) Siehe S. 6.

$$J = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2C}{2A - \left(A - \frac{B}{2}\right) \sin^2(2\varphi)} \, d\varphi,$$

$$J = -2C \left[\frac{2}{\sqrt{A(2A+B)}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{2A+B}{4A}} \operatorname{tg}(2\varphi) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}},$$

$$J = \pi \frac{3b^2\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{7}}.$$

Der Inhalt der Kurve ist gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Radius bestimmt ist durch:

$$r^2 = b^2 \frac{3\sqrt{2}\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{7}}.$$

Für den Radius des durch die Wendepunkte gehenden Kreises war die Gleichung gefunden [1]):

$$R^2 = b^2 \frac{3\sqrt{3}\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{14}}.$$

Es ergibt sich demnach der Satz:

Der Flächeninhalt der harmonischen Kovariante zweiter Art im Falle II ist gleich dem $\frac{2}{\sqrt{3}}$ *fachen Betrage des Inhaltes des Kreises, der durch die Wendepunkte geht, und gleich dem* $\frac{2}{\sqrt{7}}$ *fachen Betrage des Inhaltes der harmonischen Kovariante erster Art.*

Im Falle IV ist $A = 0$. Die Gleichungen (15a) liefern die von Thomae betrachtete Gleichung in Polarkoordinaten, [2]) sodaß deren Diskussion an dieser Stelle weggelassen werden kann.

Wie die rechtwinkligen Koordinaten, [3]) so lassen sich auch die Polarkoordinaten in diesem Falle IV mit Hilfe elliptischer Funktionen darstellen. Man findet:

$$r^2 = \frac{b^2}{6\,(3-2\sqrt{2})^3} \frac{dn^2u \cdot dn^2w + K^2 cn^2u \cdot cn^2w}{cn^2u \cdot dn^2w},$$

(16)

$$\operatorname{tg}\varphi = K \frac{cn\,u \cdot cn\,w}{dn\,u \cdot dn\,w}.$$

[1]) Siehe S. 12.
[2]) Leipz. Ber. 1919. Bd. 71, S. 297.
[3]) Siehe S 17.

Es läßt sich weiter mit Hilfe der Vorzeichen von ϱ_1^2 und ϱ_2^2[1]) zeigen, daß in den Fällen I und V je zwei getrennte Zweige der Kovariante vorhanden sind, während es im Falle III nur einen einzigen geschlossenen Zweig gibt. Im Falle V kann $\varrho_2^2 > 0$ oder $\varrho_2^2 < 0$ sein; das hängt ab von der Größe des Winkels φ. Nur in einem bestimmten Winkelraum zu beiden Seiten der Achsen treten reelle Zweige des zweiten Kovariantenzuges auf. Der sich hier ergebende Winkel stimmt überein mit dem Winkel, den man aus Gleichung (7) berechnen kann. Er ist bestimmt durch die Gleichung:

$$2A - \left(A - \frac{B}{2}\right) \sin^2(2\varphi) = 0 \,,$$

(17)

$$\sin^2(2\varphi) = \frac{2A}{A - \frac{B}{2}} \,.$$

Setzt man für A und B die ursprünglichen Werte ein, so findet man zur Bestimmung des Winkels φ den folgenden Ausdruck:

(18)
$$\varphi = \text{arc sin} \sqrt{\frac{a^2(3 - 2\sqrt{2}) - b^2(3 + 2\sqrt{2})}{6(a^2 - b^2)}} \,.$$

2φ ist der gesamte Winkelraum, in dem allein reelle Punkte des zweiten Zweiges der harmonischen Kovariante zweiter Art im Falle V liegen können.

§ 2.

Die Grundkegelschnitte sind eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamem Mittelpunkt und gleichen Hauptachsenrichtungen.

Wählt man die Achsen der gegebenen Ellipse zu Koordinatenachsen, ihren Mittelpunkt zum Koordinatenanfang, so lauten die Gleichungen der gegebenen Grundkegelschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,, \qquad \frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \,.$$

Wir nennen die Hauptachse der Ellipse $2a$; die reelle Achse der Hyperbel, die in die Richtung dieser Hauptachse fällt, ist $2a_1$. Ist $a_1 < a$, dann haben Ellipse und Hyperbel vier reelle Schnittpunkte; ist $a_1 = a$, berühren sich beide Kegelschnitte in den Hauptscheiteln; ist $a_1 > a$, gibt es keine reellen Schnittpunkte der beiden Grundkegelschnitte.

Aus den Gleichungen der Ellipse und der Hyperbel in Linienkoordinaten:

---

[1]) Siehe S. 18.

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0, \qquad a_1^2u^2 - b_1^2v^2 - 1 = 0$$

ergibt sich die Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art:

$$(19)\quad x^4(b^4 + 34b^2b_1^2 + b_1^4) + y^4(a^4 - 34a^2a_1^2 + a_1^4) + 2x^2y^2[a^2b^2 - a_1^2b_1^2 + 17(a^2b_1^2 - a_1^2b^2)] - 2x^2[a_1^2b^4 + a^2b_1^4 + 17b^2b_1^2(a^2 + a_1^2)] - 2y^2[a_1^4b^2 - a^4b_1^2 + 17a^2a_1^2(b_1^2 - b^2)] + a_1^4b^4 + a^4b_1^4 + 34a^2a_1^2b^2b_1^2 = 0.$$

Die harmonische Kovariante zweiter Art ist eine Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch zu jeder der Koordinatenachsen, aber nicht symmetrisch zu den Winkelhalbierenden des Koordinatensystems liegt. Da das Absolutglied der Gleichung aus lauter positiven Gliedern besteht, so gibt es keinen Fall, in dem der Koordinatenanfang als Kurvenpunkt der Kovariante angehört. Wird $y = 0$ und $x^2 = \xi$ gesetzt, so ergeben sich für die Schnittpunkte der Kurve mit der x — Achse die beiden Ausdrücke:

$$(20)\quad \xi_1 = \frac{a^2b_1^2 + \varepsilon_1^2a_1^2b^2}{b_1^2 + \varepsilon_1^2b^2}, \qquad \xi_2 = \frac{a^2b_1^2 + \varepsilon_1^{-2}a_1^2b^2}{b_1^2 + \varepsilon_1^{-2}b^2}.$$

Auf analoge Weise findet man für $y^2 = \eta$ die Ausdrücke:

$$21)\quad \eta_1 = \frac{a_1^2b^2 + \varepsilon_1^{-2}a^2b_1^2}{a_1^2 - \varepsilon_1^{-2}a^2}, \qquad \eta_2 = \frac{a_1^2b^2 + \varepsilon_1^2a^2b_1^2}{a_1^2 - \varepsilon_1^2a^2}.$$

Es ist stets $\xi_1 > 0$ und $\xi_2 > 0$, d. h. es gibt in allen Fällen vier reelle Schnittpunkte der Kurve mit der x— Achse. Ist insbesondere $a = a_1$, dann wird

$$\xi_1 = \xi_2 = a^2.$$

Die vier Schnittpunkte mit der x — Achse fallen zu zwei Punkten zusammen; die Kurve hat in den Hauptscheiteln der Grundkegelschnitte je einen Doppelpunkt.

Für die Schnittpunkte mit der y — Achse findet man folgendes:

$\eta_1 > 0$ für $a_1^2 > \varepsilon_1^{-2}a^2$ oder $a_1 > \varepsilon_1^{-1}a$,
$\eta_2 > 0$ für $a_1^2 > \varepsilon_1^2a^2$ oder $a_1 > \varepsilon_1 a$.

Die Anzahl der Schnittpunkte mit der y — Achse und damit die Gestalt der harmonischen Kovariante zweiter Art ist also verschieden je nach der Größe des Verhältnisses der Hauptachsen der Grundkegelschnitte zu einander. Die Nebenachsen b und b_1 spielen eine nebensächliche Rolle. Die Ergebnisse zeigt folgende Tabelle:

	Größe d. Achsen	Schnittpunkte mit der x — Achse	mit der y — Achse
I.	$0 < a_1 < \varepsilon_1 a$	4 reelle Schnittpunkte	0 reelle Schnittpunkte
II.	$a_1 = \varepsilon_1 a$	4 „ „	1 isol. Doppelpunkt
III.	$\varepsilon_1 a < a_1 < a$	4 „ „	2 reelle Schnittpunkte
IV.	$a_1 = a$	2 Doppelpunkte	2 „ „
V.	$a < a_1 < \varepsilon_1^{-1} a$	4 reelle Schnittpunkte	2 „ „
VI.	$a_1 = \varepsilon_1^{-1} a$	4 „ „	2 „ „
VII.	$a_1 > \varepsilon_1^{-1} a$	4 „ „	1 isol. Doppelpunkt 4 reelle Schnittpunkte

Im Falle I ergeben sich keine reellen Schnittpunkte mit der y — Achse, d. h. die Kurve kann, da Symmetrie in bezug auf die Koordinatenachsen herrscht, nicht aus einem einzigen geschlossenen Kurvenzuge bestehen.

Im Falle II ist $a_1 = \varepsilon_1 a$, also η_1 negativ, $\eta_2 = \infty$; der zweite Kardinalpunkt gehört demnach der Kurve an, und zwar als isolierter Doppelpunkt.

Im Falle III gibt es zwei reelle Schnittpunkte mit der y — Achse. Es ist stets $\eta_1 < 0$ und $\eta_2 > b^2$, denn:

$$\eta_2 = \frac{a_1^2 b^2 + \varepsilon_1^2 a^2 b_1^2}{a_1^2 - \varepsilon_1^2 a^2} = b^2 \frac{a_1^2 + \varepsilon_1^2 a^2 \frac{b_1^2}{b^2}}{a_1^2 - \varepsilon_1^2 a^2} > b^2, \text{ weil}$$

$$\left[a_1^2 + \varepsilon_1^2 a^2 \frac{b_1^2}{b^2}\right] > \left[a_1^2 - \varepsilon_1^2 a^2\right] \text{ ist.}$$

Die beiden reellen Schnittpunkte der Kurve mit der y-Achse liegen also stets außerhalb der Nebenscheitel der Ellipse, wie auch die imaginäre Hyperbelachse beschaffen sein mag. Die vier reellen Schnittpunkte der Kovariante mit der x-Achse in den Fällen I, II, III liegen innerhalb der Hauptscheitel der Ellipse, denn es ist:

$$\xi_1 < a^2 \text{ und } \xi_2 < a^2, \text{ andrerseits}$$
$$\xi_1 > a_1^2 \text{ und } \xi_2 > a_1^2.$$

Die Punkte liegen demnach in den Zwischenräumen, die von je einem Hauptscheitel der Ellipse und der Hyperbel gebildet werden.

Im Falle IV ist $a_1 = a$, also η_1 imaginär, $\eta_2 > b^2$.

Im Falle V ist $a < a_1 < \varepsilon_1^{-1} a$; auch hier liegen die zwei reellen Schnittpunkte mit der y-Achse außerhalb der Ellipsenneben-

scheitel, ebenso im Falle VI. Es wird hier $\eta_1 = \infty$, und man findet wie im Falle II, daß der zweite Kardinalpunkt als isolierter Doppelpunkt der Kurve angehört.

Ist $a_1 > \varepsilon_1^{-1} a$, also im Falle VII, so hat die harmonische Kovariante mit der y-Achse vier reelle Schnittpunkte, die sämtlich außerhalb der Nebenscheitel der Ellipse liegen, denn es ist auch $\eta_1 > b^2$. Ist $a_1 > a$, also in den Fällen V, VI, VII, so liegen die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse außerhalb der Ellipsenhauptscheitel, aber immer zwischen den Punkten, in denen die Ellipse und die Hyperbel die x-Achse scheiden, denn man findet:

$$a_1^2 > \xi_1 > a^2 , \qquad a_1^2 > \xi_2 > a^2 .$$

Die Asymptoten der Kurve gehen durch den Koordinatenanfang, und für ihre Richtungskoeffizienten findet man die beiden Werte:

$$m_1^2 = -\frac{b^2 + \varepsilon_1^2 b_1^2}{a^2 - \varepsilon_1^2 a_1^2} , \qquad m_2^2 = -\frac{b^2 + \varepsilon_1^{-2} b_1^2}{a^2 - \varepsilon_1^{-2} a_1^2} .$$

Die Anzahl der reellen Asymptoten in den sieben Fällen ist aus folgender Zusammenstellung zu ersehen:

Betrachteter Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII
Anzahl der reellen Asymptoten	0	0	2	2	2	2	4

Ist im Falle IV, wo $a_1 = a$ ist, auch noch $b_1 = b$, so ergibt sich:

$$m_2^2 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1 + \varepsilon_1^{-2}}{1 - \varepsilon_1^{-2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{b^2}{a^2} ,$$

$$m_2 = \pm 1{,}0298 \frac{b}{a} .$$

Die Asymptoten der gegebenen Hyperbel haben die Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} x$; die Asymptotenrichtungen der Hyperbel und der harmonischen Kovariante zweiter Art unterscheiden sich demnach im Falle IV sehr wenig von einander.

Die gemeinsamen Punkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten sind Berührungspunkte, deren Koordinaten bestimmt sind durch die Gleichung für die Ellipse:

$y^4(a^2b_1^2+a_1^2b^2)^2+2y^2b^4(a^2-a_1^2)(a^2b_1^2+a_1^2b^2)+b^8(a^2-a_1^2)^2=0,$

woraus sich ergibt:

$$(23)\qquad x^2=\frac{a^4(b^2+b_1^2)}{a^2b_1^2+a_1^2b^2}\,,\qquad y^2=-\frac{b^4(a^2-a_1^2)}{a^2b_1^2+a_1^2b^2}\,,$$

und für die Hyperbel:

$y^4(a^2b_1^2+a_1^2b^2)^2+2y^2b_1^4(a^2-a_1^2)(a^2b_1^2+a_1^2b^2)+b_1^6(a^2-a_1^2)^2=0;$

$$(24)\qquad \bar{x}^2=\frac{a_1^4(b^2+b_1^2)}{a^2b_1^2+a_1^2b^2}\,,\qquad \bar{y}^2=-\frac{b_1^4(a^2-a_1^2)}{a^2b_1^2+a_1^2b^2}\,.$$

Ist $a_1<a$, also in den Fällen I, II, III, dann ist $y^2<O$, d. h. die Kovariante hat mit der Ellipse keine reellen Punkte gemeinsam. Im Falle IV ist $a^2=a_1^2$ und infolgedessen $y^2=0$, $x=\pm a$; Kovariante und Ellipse berühren sich also in den Ellipsenhauptscheiteln. Ist $a_1>a$, also in den Fällen V, VI, VII, dann ist $y^2>O$, es gibt also reelle gemeinsame Punkte der harmonischen Kovariante zweiter Art und der Ellipse, und zwar der Symmetrie wegen vier.

In den Fällen I, II, III gibt es keine reellen Berührungspunkte der Kovariante und der Hyperbel. Da nun die Schnittpunkte mit der x-Achse zwischen denen der Grundkegelschnitte mit der x-Achse liegen, und da es für I und II reelle Schnittpunkte mit der y-Achse nicht gibt, kann die Kovariante nur aus zwei getrennten Zweigen bestehen, die in den von Ellipse und Hyperbel gemeinsam begrenzten Räumen verlaufen.[1]) Von dort aus sind aber keine reellen Tangenten an die Grundkegelschnitte möglich, sodaß man demnach zu folgendem Ergebnis kommt:

Besteht für die Hauptachsen einer Ellipse und einer Hyperbel mit gemeinsamem Mittelpunkt, die dieselbe Richtung haben, die Beziehung $a_1<(3-2\sqrt{2})a$, dann gibt es keinen Punkt der Ebene, von dem aus man an diese beiden Kegelschnitte vier reelle Tangenten legen kann, die einen harmonischen Strahlenbüschel bilden der Art, daß je zwei Tangenten an verschiedene Kegelschnitte konjugierte Elemente sind.

Im Falle III kommt zu den beiden geschlossenen Kurvenzügen noch ein Zweig der Kovariante außerhalb der Ellipse dazu.[2])

Für $a^2=a_1^2$, im Falle IV, wird $\bar{y}^2=O$ und $\bar{x}^2=a^2=a_1^2$, d. h. der Berührungspunkt von Kovariante und Ellipse ist gleichzeitig Berührungspunkt von Kovariante und Hyperbel.

---

[1]) Siehe Figur 4.

[2]) Siehe Figur 5.

In den Fällen V, VI, VII hat die Kovariante vier reelle Berührungspunkte mit der Hyperbel, ebenso wie mit der Ellipse.

Zur Abkürzung der folgenden Rechnungen führen wir die Bezeichnungen ein:

$$
\begin{aligned}
A &= b^4 + 34b^2b_1^2 + b_1^4,\\
B &= a^4 - 34a^2a_1^2 + a_1^4,\\
C &= a^2b^2 - a_1^2b_1^2 + 17\,(a^2b_1^2 - a_1^2b^2),\\
D &= a_1^2b^4 - a^2b_1^4 + 17\,b^2b_1^2\,(a^2 + a_1^2),\\
E &= a_1^4b^2 - a^4b_1^2 + 17\,a^2a_1^2\,(b_1^2 - b^2),\\
F &= a_1^4b^4 + a^4b_1^4 + 34\,a^2a_1^2b^2b_1^2.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Die Kovariantengleichung nimmt dann die Form an:

$$Ax^4 + By^4 + 2Cx^2y^2 - 2Dx^2 - 2Ey^2 + F = 0. \tag{19a}$$

Im Falle IV, wo $a_1 = a$ ist, tritt eine wesentliche Vereinfachung dieser Gleichung ein. Die Koeffizienten in (19a) werden für $a_1 = a$ zu:

$$
\begin{aligned}
A &= b^4 + 34\,b^2b_1^2 + b_1^4,\\
B &= -\,32\,a^4,\\
C &= -\,16\,a^2\,(b^2 - b_1^2),\\
D &= a^2\,(b^4 + 34\,b^2b_1^2 + b_1^4) = a^2A,\\
E &= -\,16\,a^4\,(b^2 - b_1^2) = a^2C,\\
F &= a^4\,(b^4 + 34\,b^2b_1^2 + b_1^4) = a^4A = a^2D,
\end{aligned}
$$

und die Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art ist durch den vereinfachten Ausdruck dargestellt:

$$A\,(x^2 - a^2)^2 + 2\,Cy^2\,(x^2 - a^2) - 32\,a^4y^4 = 0 \text{ oder}$$

$$(b^4 + 34\,b^2b_1^2 + b_1^4)(x^2 - a^2)^2 - 32\,a^2\,(b^2 - b_1^2)(x^2 - a^2)\,y^2 - 32\,a^4y^4 = 0. \tag{19b}$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich darstellen als ein Produkt zweier Faktoren, deren jeder vom zweiten Grade ist:

$$\{(x^2 - a^2)\,[b^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b_1^2\,(3 - 2\sqrt{2})] + 4\sqrt{2}\,a^2y^2\}$$

$$\{(x^2 - a^2)[b_1^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b^2\,(3 - 2\sqrt{2})] - 4\sqrt{2}\,a^2y^2\} = 0.$$

Berühren sich also Ellipse und Hyperbel in den Hauptscheiteln, so zerfällt die harmonische Kovariante zweiter Art in zwei Kegelschnitte, und zwar in eine Ellipse und in eine Hyperbel,[1]) deren Gleichungen sind:

---

[1]) Siehe Figur 6.

$$(26)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2.4\sqrt{2}}{b^2(3+2\sqrt{2})+b_1^{\,2}(3-2\sqrt{2})}-1=0,$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2.4\sqrt{2}}{b_1^{\,2}(3+2\sqrt{2})+b^2(3-2\sqrt{2})}-1=0.$$

Diese Kegelschnitte haben dieselben Hauptachsen wie die Grundkegelschnitte, aber die Nebenachsen sind verschieden. Ist insbesondere noch $b=b_1$, dann nehmen die Gleichungen (26) folgende Form an:

$$(26a)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{2\sqrt{2}\,y^2}{3b^2}-1=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{2\sqrt{2}\,y^2}{3b^2}-1=0.$$

Für $a^2=b^2=R^2$ besteht Uebereinstimmung mit Gleichung (143) bei Thomae.[1])

Die Nebenachse der Ellipse (26), die einen Bestandteil der Kovariante bildet, liegt in der y-Achse, solange

$$\tfrac{1}{8}\left[b^2(4+3\sqrt{2})-b_1^{\,2}(4-3\sqrt{2})\right]<a^2 \text{ ist.}$$

Wird $b^2(4+3\sqrt{2})-b_1^{\,2}(4-3\sqrt{2})=8a^2$, so zerfällt die harmonische Kovariante zweiter Art in einen Kreis und eine Hyperbel. Ist $\tfrac{1}{8}\left[b^2(4+3\sqrt{2})-b_1^{\,2}(4-3\sqrt{2})\right]>a^2$, dann wird die x-Achse zur Nebenachse der der Kovariante angehörenden Ellipse. Für $b=b_1$ besteht die Kurve dann aus einem Kreis und einer Hyperbel, wenn die Gleichung erfüllt ist:

$$b^2=b_1^{\,2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^2.$$

Es läßt sich zeigen, daß in keinem andern als dem hier betrachteten Falle IV die harmonische Kovariante zweiter Art der beiden gegebenen Grundkegelschnitte in zwei Kegelschnitte zerfallen kann, und man kommt zu folgenden Ergebnis:

Bei einem System sich in den festen Hauptscheiteln berührender Ellipsen und Hyperbeln:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}-1=0,\qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\lambda_1^{\,2}}-1=0$$

bilden Ellipse und Hyperbel mit den halben Nebenachsen:

$$\bar{\lambda}=\sqrt{\frac{\lambda^2\varepsilon_1^{\,-1}+\lambda_1^{\,2}\varepsilon_1}{4\sqrt{2}}}\quad\text{bezw.}\quad \bar{\lambda}_1=\sqrt{\frac{\lambda_1^{\,2}\varepsilon_1^{\,-1}+\lambda^2\varepsilon_1}{4\sqrt{2}}}$$

[1]) Leipz. Ber 1919. Bd. 71, S. 292.

die harmonische Kovariante zweiter Art derjenigen Ellipse und Hyperbel, deren Nebenhalbachsen λ bezw. λ_1 sind.

Allgemein läßt sich, wie später gezeigt wird, eine Formel aufstellen, sodaß man für ein derartiges System von Kegelschnitten bestimmen kann, in welcher Beziehung zwei zusammengehörige Individuen zu zwei anderen stehen.

In allen sieben betrachteten Fällen treten nicht irgendwelche Besonderheiten der Kurve auf, wenn man $a = b$ setzt, wenn man also als Grundkegelschnitte einen Kreis und eine Hyperbel annimmt. Die Gleichungen werden nur etwas vereinfacht, aber die Kurven behalten im wesentlichen ihre Gestalt bei. Dasselbe zeigt sich für $a_1 = b_1$, also für die Annahme einer gleichseitigen Hyperbel. Diese Erscheinung erklärt sich aus der schon früher festgestellten Tatsache, daß die Größe der Nebenachsen der Kegelschnitte keinen großen Einfluß auf die Kurvenform hat.

Wie im § 1 läßt sich hier in den Fällen II und VI bequem zeigen, daß die aufgestellte Kurvengleichung in der Tat die der harmonischen Kovariante zweiter Art ist, und man kommt zu folgendem Satz:

Gelten für Ellipse und Hyperbel mit demselben Mittelpunkt, deren Hauptachsen gleiche Richtung haben, die Beziehungen $a_1 = (3 \pm 2\sqrt{2})\, a$, *so bilden die Hauptscheitel der beiden Kegelschnitte ein harmonisches Punktsystem; je ein Hauptscheitel der Hyperbel und der Ellipse sind konjugierte Elemente.*

Die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten sind auch Punkte der harmonischen Kovariante erster Art. Dieser Kegelschnitt ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(28) \qquad x^2 (b^2 - b_1^2) + y^2 (a^2 + a_1^2) + a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2 = 0.$$

In den Fällen I, II, III ist er stets imaginär.

Ist $a_1 = a$, also im Falle IV, so ergibt sich eine reelle Ellipse für $b^2 > b_1^2$, eine Hyperbel für $b^2 < b_1^2$. Ist $b^2 = b_1^2$, dann besteht die harmonische Kovariante erster Art aus der x-Achse. In den Fällen V, VI, VII, wo $a_1^2 > a^2$ ist, können verschiedene Fälle eintreten: Ist $b^2 > b_1^2$, so wird die Kurve eine reelle Ellipse, insbesondere ein Kreis für $b^2 = a^2 + a_1^2 + b_1^2$. Ist $a^2 b_1^2 = a_1^2 b^2$, so zerfällt die harmonische Kovariante erster Art in ein reelles sich

schneidendes Geradenpaar. Ist $b^2 - b_1^2$, dann ergeben sich zwei Parallele zur x-Achse im Abstande $y = \pm \sqrt{\frac{b^2 a_1^2 - a^2}{a_1^2 + a^2}}$. Und schließlich für $b^2 < b_1^2$ wird der kovariante Kegelschnitt eine Hyperbel.[1])

Das Geschlecht der harmonischen Kovariante zweiter Art ist für die einzelnen Fälle nach der Formel $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII
d	0	1	0	2	0	1	0
p	3	2	3	1	3	2	3

Eine rationale Parameterdarstellung ist in keinem der sieben Fälle möglich. Im Falle IV ist die Kovariante vom Geschlechte 1; ihre Gleichung müßte sich also mit Hilfe elliptischer Funktionen darstellen lassen. Da die Kurve aber zerfällt, ist eine Darstellung mit Benutzung der Parameterdarstellungen von Ellipse und Hyperbel[2]) herbeizuführen:

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = b \sin \varphi,$$
$$x = a_1 \sec \varphi, \qquad y = b_1 \operatorname{tg} \varphi.$$

Wir erhalten demnach für unsere Kovariante im Falle IV mit Hilfe des Parameters φ folgende Darstellung:

$$(29) \quad x_1 = a \cos \varphi, \quad y_1 = \sqrt{\frac{b^2(4+3\sqrt{2}) - b_1^2(4-3\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}} \sin \varphi,$$
$$x_2 = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{b_1^2(4+3\sqrt{2}) - b^2(4-3\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}} \operatorname{tg} \varphi.$$

Für $\varphi = 0$ wird $x_1 = x_2 = a$; $y_1 = y_2 = 0$,

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $x_1 = 0$, $y_1 = \sqrt{\eta_2}$;[3])

$$x_2 = \infty, \quad y_2 = \infty.$$

[1]) Siehe Figur 7 u. 8.
[2]) Salmon-Fiedler, a. a. O. S. 322.
[3]) Siehe S. 21.

Zu einer irrationalen Parameterdarstellung im allgemeinen Falle gelangt man, wenn man sich die harmonische Kovariante zweiter Art erzeugt denkt durch zwei einander projektiv zugeordnete Kegelschnittbüschel, die die Gleichungen haben:

$$
\begin{aligned}
&6\,(a^2b^2 - a^2y^2 - b^2x^2) - \lambda\,(a_1{}^2b^2 - a^2b_1{}^2 \\
&\quad + b_1{}^2x^2 - b^2x^2 - a_1{}^2y^2 - a^2y^2) = 0, \\
&6\,\lambda\,(-a_1{}^2b_1{}^2 - a_1{}^2y^2 + b_1{}^2x^2) - (a_1{}^2b^2 - a^2b_1{}^2 \\
&\quad + b_1{}^2x^2 - b^2x^2 - a_1{}^2y^2 - a^2y^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Die Grundpunkte der beiden Büschel sind die Schnittpunkte der Grundkegelschnitte mit der harmonischen Kovariante erster Art, also die Berührungspunkte (23) und (24).

Durch Umordnung der Gleichungen (30) und Elimination je einer Variabeln kommt man auf die irrationale Parameterdarstellung:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{b^2 + b_1{}^2}{a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2} \cdot \frac{\lambda^2a_1{}^4 - 6\,\lambda\,a^2a_1{}^2 + a^4}{\lambda^2 - 6\,\lambda + 1}, \\
y^2 &= \frac{a_1{}^2 - a^2}{a^2b_1{}^2 + a_1{}^2b^2} \cdot \frac{\lambda^2b_1{}^4 + 6\,\lambda\,b^2b_1{}^2 + b^4}{\lambda^2 - 6\,\lambda + 1}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

$\lambda = 0$ liefert die Berührungspunkte von Kovariante und Ellipse, während man für $\lambda = \infty$ die gemeinsamen Punkte von Kovariante und Hyperbel erhält.

Verwendet man die unter (25) eingeführten Abkürzungen, dann findet man als Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art in Polarkoordinaten:

(32)

$$
A\varrho^4\cos^4\varphi + B\varrho^4\sin^4\varphi + C\frac{\varrho^4}{2}\sin^2(2\varphi) - 2D\varrho^2\cos^2\varphi - 2E\varrho^2\sin^2\varphi + F = 0,
$$

deren Diskussion analog der in § 1 zu denselben Ergebnissen führt wie die der Gleichung (19) in Cartesischen Koordinaten. Im Falle IV erhält man nach einigen Umformungen:

$$
\begin{aligned}
\varrho_1{}^2 &= \frac{a^2\,[b_1{}^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b^2\,(3 - 2\sqrt{2})]}{[b_1{}^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b^2\,(3 - 2\sqrt{2})]\cos^2\varphi - 4\sqrt{2}\,a^2\sin^2\varphi}, \\
\varrho_2{}^2 &= \frac{a^2\,[b^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b_1{}^2\,(3 - 2\sqrt{2})]}{[b^2\,(3 + 2\sqrt{2}) + b_1{}^2\,(3 - 2\sqrt{2})]\cos^2\varphi + 4\sqrt{2}\,a^2\sin^2\varphi}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Eine Vereinfachung tritt hier noch ein, wenn $b_1 = b$ wird:

$$\varrho_1^2 = \frac{3a^2b^2}{3b^2\cos^2\varphi - 2\sqrt{2}\,a^2\sin^2\varphi}\,,$$

(33a)

$$\varrho_2^2 = \frac{3a^2b^2}{3b^2\cos^2\varphi + 2\sqrt{2}\,a^2\sin^2\varphi}\,.$$

Unter Benutzung der Polargleichungen von Ellipse und Hyperbel[1]) findet man auf anderem Wege diese selben Darstellungen, die als Sonderfälle aus (32) abgeleitet sind.

Der Fall der konfokalen Ellipse und Hyperbel ist ein Sonderfall von I, II oder III, da für ihn $a_1 < a$ ist; er bietet keine Besonderheiten. Legt man die Hyperbel so, daß ihre reelle Achse in die Richtung der Nebenachse der Ellipse fällt, so weicht die Gestalt der harmonischen Kovariante zweiter Art nicht wesentlich ab von der in den hier behandelten Fällen, denn die Ellipsenachse, die senkrecht zur reellen Achse der Hyperbel steht, hat keinen bedeutenden Einfluß, wie wir gesehen haben. Außerdem ist im Verlauf der Kurvendiskussion nie von der Voraussetzung $a^2 > b^2$ Gebrauch gemacht worden. Die Hyperbel kann daher auch um 90^0 gedreht sein gegen die hier angenommene Lage, ohne daß sich wesentlich andere Verhältnisse für die harmonische Kovariante zweiter Art ergeben, abgesehen davon, daß die Kurvenzweige ihre Lage zu den Achsen ändern.

§ 3.

Die Grundkegelschnitte sind zwei konzentrische Hyperbeln, deren reelle Achsen einen rechten Winkel mit einander bilden.

Wählen wir die reellen Achsen der Hyperbeln zu Achsen eines rechtwinkligen Systems, ihren gemeinsamen Mittelpunkt zum Koordinatenanfang, dann haben sie die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad -\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1\,,$$

und ihre harmonische Kovariante zweiter Art ist:

(34) $x^4(b^4 + 34b^2b_1^2 + b_1^4) + y^4(a^4 + 34a^2a_1^2 + a_1^4) - 2x^2y^2[a^2b^2 + a^2b_1^2 + 17(a^2b_1^2 + a_1^2b^2)] + 2x^2[a_1^2b^4 - a^2b_1^4 + 17b^2b_1^2(a_1^2 - a^2)] + 2y^2[a_1^4b^2 - a^4b_1^2 + 17a^2a_1^2(b^2 - b_1^2)] + a^4b_1^4 + a_1^4b^4 - 34a^2a_1^2b^2b_1^2 = 0.$

[1]) Salmon-Fiedler, a. a. O. S. 319.

Auch hier liegt die Kurve symmetrisch zu den Achsen. Ihre Gestalt ist verschieden je nach der Größe von a, a_1, b, b_1 und je nach dem Verhältnis dieser Werte zu einander. Wir untersuchen, um auf die verschiedenen möglichen Fälle zu kommen, die Schnittpunkte der Kurve mit den Koordinatenachsen. Für $y = O$ und $x^2 = \xi$ ergibt sich die Gleichung:

$$\xi^2 (b^4 + 34 b^2 b_1^2 + b_1^4) + 2\,\xi\,[a_1^2 b^4 - a^2 b_1^4 + 17 b^2 b_1^2 (a_1^2 - a^2)] + a^4 b_1^4 + a_1^4 b^4 - 34 a^2 a_1^2 b^2 b_1^2 = 0,$$

und daraus findet man die Werte:

$$\xi_1 = \frac{a^2 b_1^2 - \varepsilon_1^2 a_1^2 b^2}{b_1^2 + \varepsilon_1^2 b^2}, \qquad \xi_2 = \frac{a^2 b_1^2 - \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2}{b_1^2 + \varepsilon_1^{-2} b^2}.$$

Für die Schnittpunkte mit der y-Achse ergeben sich auf ähnliche Weise die Ausdrücke:

$$\eta_1 = \frac{a^2 b_1^2 - \varepsilon_1^2 a_1^2 b^2}{a^2 + \varepsilon_1^2 a_1^2}, \qquad \eta_2 = \frac{a^2 b_1^2 - \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2}{a^2 + \varepsilon_1^{-2} a_1^2}.$$

Während bei der harmonischen Kovariante zweier Ellipsen oder der Ellipse und Hyperbel nur das Verhältnis zweier Achsen von Bedeutung ist, kommen bei zwei Hyperbeln, die als Grundkegelschnitte benutzt werden, alle vier Achsen in Betracht. Das hängt mit der Tatsache zusammen, daß auch für die Realität der Schnittpunkte beider Hyperbeln alle vier Achsen berücksichtigt werden müssen. Die Hyperbelschnittpunkte haben die Koordinaten:

$$x^2 = -\frac{a^2 a_1^2 (b^2 + b_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2}, \qquad y^2 = -\frac{b^2 b_1^2 (a^2 + a_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2};$$

sie sind also reell, wenn $a_1^2 b^2 > a^2 b_1^2$ ist, und sie liegen im Unendlichen für $a_1^2 b^2 = a^2 b_1^2$, d. h. für ähnliche Hyperbeln.

Es ist nun $\xi_1 > O$ und $\eta_1 > O$ für $a^2 b_1^2 > (17 - 12\sqrt{2})\, a_1^2 b^2$,

$\xi_2 > O$ und $\eta_2 > O$ für $a^2 b_1^2 > (17 + 12\sqrt{2})\, a_1^2 b^2$.

Die harmonische Kovariante zweiter Art hat demnach wieder eine verschiedene Gestalt, je nachdem, welcher der folgenden sieben Fälle vorliegt:

I. $a^2 b_1^2 < \varepsilon_1^2 a_1^2 b^2$,
II. $a^2 b_1^2 = \varepsilon_1^2 a_1^2 b^2$,
III. $\varepsilon_1^2 a_1^2 b^2 < a^2 b_1^2 < a_1^2 b^2$,
IV. $a^2 b_1^2 = a_1^2 b^2$,
V. $a_1^2 b^2 < a^2 b_1^2 < \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2$,
VI. $a^2 b_1^2 = \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2$,
VII. $a^2 b_1^2 > \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2$.

Der Fall, daß sich die Grundkegelschnitte reell schneiden, gehört zu I, II und III; die ähnlichen Hyperbeln werden unter IV betrachtet; in den Fällen V, VI und VII haben die gegebenen Hyperbeln keinen Punkt mit einander gemeinsam. Im Falle II ist $a^2 b_1^2 = \varepsilon_1^2 a_1^2 b^2$, also $\xi_1 = \eta_1 = 0$, ξ_2 und η_2 imaginär. Im Falle VI ist $a^2 b_1^2 = \varepsilon_1^{-2} a_1^2 b^2$, also $\xi_2 = \eta_2 = 0$, ξ_1 und η_1 reell.

Da ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 wegen des ständig positiven Nenners nie zu ∞ werden können, gehören der Kurve niemals der erste und zweite Kardinalpunkt an. Daß in den Fällen II und VI der Koordinatenanfang ein doppelter Kurvenpunkt ist, erkennt man, wenn man die Kurve zum Schnitt bringt mit der Geraden $y = \mu x$. Führt man die Bezeichnungen ein:

$$A = b^4 + 34 b^2 b_1^2 + b_1^4,$$
$$B = a^4 + 34 a^2 a_1^2 + a_1^4,$$
$$C = a^2 b^2 + a_1^2 b_1^2 + 17 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2),$$
$$D = a_1^2 b^4 - a^2 b_1^4 + 17 b^2 b_1^2 (a_1^2 - a^2),$$
$$E = a_1^4 b^2 - a^4 b_1^2 + 17 a^2 a_1^2 (b^2 - b_1^2),$$
$$F = a^4 b_1^4 + a_1^4 b^4 - 34 a^2 a_1^2 b^2 b_1^2,$$

so ergibt sich die Schnittpunktsgleichung:

$$x^2 \{ x^2 A + \mu^2 B - 2 \mu^2 C + 2 (D + \mu^2 E) \} = 0,$$

$x^2 = 0$, d. h.

der Koordinatenanfang ist ein Doppelpunkt der Kurve, und zwar liegt er isoliert, weil man für den Richtungskoeffizienten μ findet:

im Falle II: $\mu = \pm i \sqrt{\frac{b_1^2 + \varepsilon_1^2 b^2}{a^2 + \varepsilon_1^2 a_1^2}}$,

im Falle VI: $\mu = \pm i \sqrt{\frac{b_1^2 + \varepsilon_1^{-2} b^2}{a^2 + \varepsilon_1^{-2} a_1^2}}$.

Im Falle I hat die Kovariante keinen reellen Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen; im Falle II ist der Koordinatenanfang der einzige gemeinsame Punkt der Kurve und der Achsen; in den Fällen III, IV, V, VI gibt es zwei reelle Schnittpunkte sowohl mit der x-Achse als auch mit der y-Achse, zu denen bei VI noch der Anfangspunkt als isolierter Doppelpunkt hinzutritt, und im Falle VII endlich sind vier verschiedene reelle Schnittpunkte mit jeder der Koordinatenachsen vorhanden.

Ueber die Lage dieser gemeinsamen Punkte der Kurve mit den Achsen läßt sich folgendes aussagen:

$$\xi_1 = a^2 \frac{b_1^2 - \varepsilon_1^2 \frac{a_1^2}{a^2} b^2}{b_1^2 + \varepsilon_1^2 b^2} < a^2, \text{ weil}$$

$$[b_1^2 + \varepsilon_1^2 b^2] > [b_1^2 - \varepsilon_1^2 \frac{a_1^2}{a^2} b^2] \text{ ist.}$$

Andrerseits ist $[b_1^2 - \varepsilon_1^{-2} \frac{a_1^2}{a^2} b^2] < [b_1^2 + \varepsilon_1^{-2} b^2]$, also auch $\xi_2 < a^2$.

Da nun $[b_1^2 - \varepsilon_1^{-2} \frac{a_1^2}{a^2} b^2] < [b_1^2 - \varepsilon_1^2 \frac{a_1^2}{a^2} b^2]$ ist, so folgt:

Die sämtlichen Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse liegen, sofern sie reell sind, zwischen den Hauptscheiteln der ersten Hyperbel, und zwar liegen die Schnittpunkte, die erst im Falle VII noch dazukommen, näher am Koordinatenanfang als die anderen. Aehnliches läßt sich zeigen für die Schnittpunkte der Kurve mit der y-Achse:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= b_1^2 \frac{a^2 - \varepsilon_1^2 a_1^2 \frac{b^2}{b_1^2}}{a^2 + \varepsilon_1^2 a_1^2} < b_1^2 \\ \eta_2 &= b_1^2 \frac{a^2 - \varepsilon_1^{-2} a_1^2 \frac{b^2}{b_1^2}}{a^2 + \varepsilon_1^{-2} a_1^2} < b_1^2 \end{aligned}\right\} \eta_1 > \eta_2$$

Die Asymptoten gehen durch den Koordinatenanfang, und für ihre Richtungskoeffizienten ergeben sich die Werte:

$$m_1^2 = \frac{b^2 + \varepsilon_1^2 b_1^2}{a^2 + \varepsilon_1^2 a_1^2}, \qquad m_2^2 = \frac{b^2 + \varepsilon_1^{-2} b_1^2}{a^2 + \varepsilon_1^{-2} a_1^2}.$$

Da m_1^2 und m_2^2 stets positiv sind, so hat die Kurve in allen Fällen vier reelle Asymptoten. Ob die Asymptotenwinkel der Kovariante größer oder kleiner sind als die der Hyperbeln, das hängt von dem Verhältnis der Achsen der Grundkegelschnitte ab. Für die Hyperbeln gilt:

$$tg\, \varphi_1 = \frac{b}{a}, \qquad tg\, \varphi_2 = \frac{b_1}{a_1},$$

und für die Kovariante ergibt sich:

$$tg\, \bar{\varphi}_1 = m_1 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_1^2 \frac{b_1^2}{b^2}}{1 + \varepsilon_1^2 \frac{a_1^2}{a^2}}}, \quad tg\, \bar{\varphi}_2 = m_2 = \frac{b_1}{a_1} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_1^2 \frac{b^2}{b_1^2}}{1 + \varepsilon_1^2 \frac{a^2}{a_1^2}}}.$$

Ist $a^2 b_1^2 < a_1^2 b^2$, also in den Fällen I, II, III, dann ist:

$$tg\,\bar{\varphi}_1 < tg\,\varphi_1, \qquad tg\,\bar{\varphi}_2 > tg\,\varphi_2.$$

Im Sonderfalle IV, wenn die Grundkegelschnitte konjugierte Hyperbeln sind, für die die Gleichungen bestehen $a^2 = a_1^2$, $b^2 = b_1^2$, fallen die Asymptoten der harmonischen Kovariante zweiter Art zusammen mit den zwei Asymptoten der konjugierten Hyperbeln, denn es ist:

$$tg\,\varphi_1 = tg\,\bar{\varphi}_1, \qquad tg\,\varphi_2 = tg\,\bar{\varphi}_2.$$

Auch in den Fällen I und II hat die Kurve vier reelle Asymptoten. Aus Symmetriegründen kann sie, da reelle Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen nicht vorhanden sind, nur aus getrennten Zügen bestehen, die in den von den Grundkegelschnitten gemeinsam begrenzten Räumen verlaufen, denen die Koordinatenachsen nicht angehören.[1]) Von diesen Punkten aus sind aber keine reellen Tangenten an die gegebenen Hyperbeln möglich, und man kommt deshalb zu folgendem Ergebnis:

Besteht für die Achsen zweier Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt und sich rechtwinklig schneidenden reellen Achsen die Beziehung $a^2 b_1^2 \leqq (3 - 2\sqrt{2})^2 a_1^2 b^2$, *so gibt es keinen Punkt der Ebene, von dem aus man an diese Kegelschnitte vier reelle Tangenten legen kann, die einen harmonischen Strahlenbüschel bilden der Art, daß je zwei Tangenten an verschiedene Hyperbeln konjugierte Elemente sind. Es gibt auch keinen Punkt, von dem aus vier im harmonischen Doppelverhältnis erster Art stehende reelle Tangenten gezogen werden könnten.*[2])

Die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$x^2 = \frac{a^4 (b^2 + b_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2}, \qquad y^2 = \frac{b^4 (a^2 + a_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2},$$

$$\bar{x}^2 = \frac{a_1^4 (b^2 + b_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2}, \qquad \bar{y}^2 = \frac{b_1^4 (a^2 + a_1^2)}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2}.$$

Sie sind also nur reell, und zwar alle acht, in den Fällen V, VI und VII. Im Falle IV wird $x = \bar{x} = \infty$, $y = \bar{y} = \infty$; der Fall IV ist der einzige Fall, in dem die Kurve Doppelpunkte besitzt, und diese liegen im Unendlichen.

---

[1]) Siehe Figur 9.

[2]) Siehe S. 37.

Ist $a^2b_1^2 = a_1^2b^2$, dann hat die Kovariantengleichung zweiter Art die Form:

$$(34a)\quad x^4(b^4 + 34b^2b_1^2 + b_1^4) + y^4(a^4 + 34a^2a_1^2 + a_1^4) - 2x^2y^2(a^2b^2 + a_1^2b_1^2 + 34a^2b_1^2) + 32a_1^2b^2[x^2(b_1^2 - b^2) + y^2(a^2 - a_1^2)] - 32a_1^4b^4 = 0.$$

Die linke Seite läßt sich als Produkt darstellen:

$$\{x^2[b^2(3 + 2\sqrt{2}) + b_1^2(3 - 2\sqrt{2})] - y^2[a^2(3 + 2\sqrt{2}) + a_1^2(3 - 2\sqrt{2})] + 4\sqrt{2}\,a_1^2b^2\}$$
$$\{x^2[b_1^2(3 + 2\sqrt{2}) + b^2(3 - 2\sqrt{2})] - y^2[a_1^2(3 + 2\sqrt{2}) + a^2(3 - 2\sqrt{2})] - 4\sqrt{2}\,a_1^2b^2\} = 0.$$

Die harmonische Kovariante zweiter Art zerfällt demnach in zwei Kegelschnitte,[1]) und zwar in zwei Hyperbeln, die die Gleichungen besitzen:

$$(35)\quad \begin{aligned} x^2(\varepsilon_1b^2 + \varepsilon_1^{-1}b_1^2) - y^2(\varepsilon_1a^2 + \varepsilon_1^{-1}a_1^2) &= 4\sqrt{2}\,a_1^2b^2,\\ -x^2(\varepsilon_1b_1^2 + \varepsilon_1^{-1}b^2) + y^2(\varepsilon_1a_1^2 + \varepsilon_1^{-1}a^2) &= 4\sqrt{2}\,a_1^2b^2. \end{aligned}$$

Ihre Achsen sind danach:

$$(35a)\quad \begin{aligned} \bar{a}^2 &= \frac{4\sqrt{2}\,a_1^2b^2}{b_1^2(3+2\sqrt{2}) + b^2(3-2\sqrt{2})},\\ \bar{b}^2 &= \frac{4\sqrt{2}\,a_1^2b^2}{a_1^2(3+2\sqrt{2}) + a^2(3-2\sqrt{2})},\\ \bar{a}_1^2 &= \frac{4\sqrt{2}\,a_1^2b^2}{b^2(3+2\sqrt{2}) + b_1^2(3-2\sqrt{2})},\\ \bar{b}_1^2 &= \frac{4\sqrt{2}\,a_1^2b^2}{a^2(3+2\sqrt{2}) + a_1^2(3-2\sqrt{2})}. \end{aligned}$$

Da diese Hyperbeln dieselben Asymptoten besitzen, so sind sie ähnliche Kegelschnitte; es muß also die Gleichung bestehen

$$\bar{a}^2\bar{b}_1^2 = \bar{a}_1^2\bar{b}^2,$$

und das ist auch in der Tat der Fall, wie man durch ausmultiplizieren leicht feststellen kann. Die Größen (35a) lassen sich noch etwas umformen, wenn man bedenkt, daß die Beziehungen bestehen müssen:

$$a_1^2 = ma^2, \quad b_1^2 = mb^2, \quad \text{damit } a^2b_1^2 = a_1^2b^2 \text{ ist.}$$

---

[1]) Siehe Figur 11.

Man findet so:

$$(35b)\qquad \begin{aligned} \bar{a}^2 &= \frac{4\sqrt{2}ma^2}{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1}\,, & \bar{b}^2 &= \frac{4\sqrt{2}mb^2}{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1}\,, \\ \bar{a}_1^{\,2} &= \frac{4\sqrt{2}ma^2}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,, & \bar{b}_1^{\,2} &= \frac{4\sqrt{2}mb^2}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Es ist $\bar{a}_1^{\,2} = \bar{n}\,\bar{a}^2$, $\bar{b}_1^{\,2} = \bar{n}\,\bar{b}^2$, $\bar{a}^2\,\bar{b}_1^{\,2} = \bar{a}_1^{\,2}\bar{b}^2$, wobei gesetzt ist:

$$\bar{n} = \frac{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,.$$

Ist noch insbesondere $a = b$, dann ist auch $a_1 = b_1$, und die Grundkegelschnitte sind gleichseitige Hyperbeln. Die harmonische Kovariante zweiter Art besteht dann auch aus zwei gleichseitigen Hyperbeln, denn es wird

$$\bar{a} = \bar{b} \quad \text{und} \quad \bar{a}_1 = \bar{b}_1\,.$$

Für $a = b = a_1 = b_1$, also für konjugierte Hyperbeln, ist

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 = \bar{a}_1^{\,2} = \bar{b}_1^{\,2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,a^2\,.$$

Man kommt also zu folgendem Ergebnis:

Für $a^2b_1^{\,2} = a_1^{\,2}b^2$ sind die Grundkegelschnitte und die harmonische Kovariante zweiter Art zwei Paare ähnlicher Hyperbeln, die für die besondere Annahme $a = b$ zu gleichseitigen und für $a = b = a_1$ zu konjugierten Hyperbeln werden.

Das Problem läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Für zwei Büschel ähnlicher Hyperbeln

$$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda_1^{\,2}} = 1\,; \qquad -\frac{x^2}{m\lambda^2} + \frac{y^2}{m\lambda_1^{\,2}} = 1$$

sind die Hyperbeln mit den Achsen $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_1$, bezw. $n\bar{\lambda}$, $n\bar{\lambda}_1$ die harmonische Kovariante zweiter Art für die Hyperbeln mit den Achsen λ, λ_1 und $m\lambda$, $m\lambda_1$. Dabei ist:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^2 &= \frac{4\sqrt{2}m\lambda^2}{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1} = k\lambda^2\,, & \bar{\lambda}_1^{\,2} &= \frac{4\sqrt{2}m\lambda_1^{\,2}}{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1} = k\lambda_1^{\,2}\,, \\ n\bar{\lambda}^2 &= \frac{4\sqrt{2}m\lambda^2}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,, & n\bar{\lambda}_1^{\,2} &= \frac{4\sqrt{2}m\lambda_1^{\,2}}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,, \\ k &= \frac{4\sqrt{2}m}{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1}\,, & n &= \frac{m\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1}{m\varepsilon_1+\varepsilon_1^{-1}}\,. \end{aligned}$$

Für $m = 1$ wird auch $n = 1$, und für $\lambda^2 = \lambda_1^{\,2}$ und $m = 1$ erhält man: $\bar{\lambda}^2 = \bar{\lambda}_1^{\,2} = n\bar{\lambda}^2 = n\bar{\lambda}_1^{\,2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\lambda^2$.

Analoge Betrachtungen lassen sich anstellen für ein beliebig vorgegebenes Doppelverhältnis d.[1])

Eine Bestätigung der Richtigkeit der Kovariantengleichung findet man, wenn man z. B. von einem Schnittpunkte der Kurve mit der y-Achse die vier Tangenten an die Grundkegelschnitte legt und deren Schnittpunkte mit der x-Achse bestimmt. Sie bilden ein harmonisches Doppelverhältnis zweiter Art.

Die harmonische Kovariante erster Art gibt Aufschluß darüber, auf was für einem Kegelschnitt die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten liegen. Ihre Gleichung ist:

$$(36) \qquad x^2(b_1^2 - b^2) + y^2(a^2 - a_1^2) = a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2.$$

Sie ist eine imaginäre Ellipse, wenn $a^2 b_1^2 < a_1^2 b^2$ ist; sie ist eine reelle Ellipse für $a^2 b_1^2 > a_1^2 b^2$, insbesondere ein Kreis, wenn die Gleichung besteht: $b^2 = a^2 - a_1^2 + b_1^2$. Einen zerfallenden Kegelschnitt erhält man für $b^2 = b_1^2$ oder $a^2 = a_1^2$. Im Falle IV liegen also stets die Berührungspunkte auf zwei Parallelen zur x-Achse, wenn $b^2 = b_1^2$ ist[2]), auf zwei Parallelen zur y-Achse für $a^2 = a_1^2$. Für den Fall der konjugierten Hyperbeln, wo $a^2 = a_1^2 = b^2 = b_1^2$ ist, ist die harmonische Kovariante erster Art dargestellt durch die unendlich ferne Gerade, die also auch durch die Berührungspunkte der harmonischen Kovariante zweiter Art mit den Grundkegelschnitten geht.

Da der Kurve außer im Falle IV, wo sie aus zwei Kegelschnitten besteht, niemals sonst zwei Doppelpunkte angehören, hat sie immer ein Geschlecht, das größer ist als 1. Ihre Gleichung läßt sich also nicht rational durch einen Parameter darstellen, und man gewinnt auch keine eindeutige Darstellung mit Hilfe elliptischer Funktionen. Eine irrationale Parameterdarstellung findet man durch Betrachtung der Kovariante als Erzeugnis der beiden projektiven Kegelschnittbüschel:

(37)

$$36(b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2) - \lambda(b_1^2x^2 - b^2x^2 + a^2y^2 - a_1^2y^2 - a^2b_1^2 - a_1^2b^2) = 0,$$

$$\lambda(-b_1^2x^2 + a_1^2y^2 - a_1^2b_1^2) - (b_1^2x^2 - b^2x^2 + a^2y^2 - a_1^2y^2 - a^2b_1^2 - a_1^2b^2) = 0,$$

---

[1]) Siehe Abschnitt III.

[2]) Siehe Figur 12.

deren Grundpunkte die Berührungspunkte von Kovariante und Grundkegelschnitten sind. Man findet:

$$(38)\quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{b^2 + b_1^2}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2} \cdot \frac{36a^4 - 36\lambda a^2 a_1^2 + \lambda^2 a_1^4}{\lambda^2 + 36\lambda + 36}, \\ y^2 &= \frac{a^2 + a_1^2}{a^2 b_1^2 - a_1^2 b^2} \cdot \frac{36b^4 - 36\lambda b^2 b_1^2 + \lambda^2 b_1^4}{\lambda^2 + 36\lambda + 36}. \end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ ergeben sich die Berührungspunkte mit der ersten, für $\lambda = \infty$ die mit der zweiten Hyperbel. Ist $a^2 b_1^2 = a_1^2 b^2$, so werden x und y unendlich groß für die Parameterwerte:

$$\lambda = -6(3 \pm 2\sqrt{2}).$$

Die allgemeine Gleichung der harmonischen Kovariante zweiter Art[1]) wird in Polarkoordinaten:

$$(40)\quad \begin{aligned} &\varrho^4 \{\cos^2(2\varphi)(A + B + 2C) + 2\cos(2\varphi)(A - B) + (A + B - 2C)\} \\ &+ 4\varrho^2 \{\cos(2\varphi)(D - E) + (D + E)\} + 4F = 0. \end{aligned}$$

Die Werte von ϱ in der x-Achse und in der y-Achse ergeben sich für $\varphi = 0$, bezw. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $2\varphi = 0$, bzw. $2\varphi = \pi$. Man erhält:

$$\varrho_1^2 = \xi_1 = \frac{-D + \sqrt{D^2 - AF}}{A}, \qquad \varrho_2^2 = \xi_2 = \frac{-D - \sqrt{D^2 - AF}}{A}.$$

Setzt man für A, D, F die ursprünglichen Werte ein, so ergibt sich Uebereinstimmung mit den Gleichungen auf Seite 31.

Nach verschiedenen Umformungen der Ausdrücke für ϱ_1^2 und ϱ_2^2 kommt man im Falle IV auf die Gleichungen:

$$\varrho_1^2 = \frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{\bar{b}^2 \cos^2\varphi - \bar{a}^2 \sin^2\varphi}, \qquad \varrho_2^2 = \frac{\bar{a}_1^2 \bar{b}_1^2}{\bar{a}_1^2 \sin^2\varphi - \bar{b}_1^2 \cos^2\varphi},$$

wo $\bar{a}$, $\bar{a}_1$, $\bar{b}$, $\bar{b}_1$ die frühere Bedeutung[2]) haben.

Das sind aber die Polargleichungen zweier Hyperbeln. Es zeigt sich also auch bei dieser Darstellung der Kurve, daß die harmonische Kovariante zweiter Art im Falle IV in zwei Hyperbeln zerfällt.

---

[1]) Siehe S. 30.

[2]) Siehe S. 35.

Abschnitt II.

Kovarianten und Kurven vierter Ordnung.

§ 4.

Die Kovarianten als Individuen von Kurvenbüscheln.

Die von Thomae aufgestellten Gleichungen für die harmonischen Kovarianten erster und zweiter Art und für die äquianharmonische Kovariante zweier Kegelschnitte lassen sich auf andere Weise finden, und diese Methode liefert gleichzeitig die Möglichkeit einer Verallgemeinerung des Problems. Aus der Invariantentheorie[1]) ist eine Gleichung bekannt für den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Tangentenbüschel an zwei Kegelschnitte ein bestimmtes Doppelverhältnis d haben. Diese Kurve sei fortan als Kovariante vom Doppelverhältnis d der beiden Grundkegelschnitte bezeichnet. In den Thomaeschen Bezeichnungen hat ihre Gleichung die Form:

$$(41)\quad 4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2 (AC-B^2)(A'C'-B'^2)-(AC'+A'C-2BB')^2=0.$$

Sind $S_1 = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0$
und $S_2 = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 = 0$

die auf ihr gemeinsames Polardreieck bezogenen Grundkegelschnitte, so gelten dabei die Beziehungen:

$$(42)\quad \begin{aligned} AC - B^2 &= a_{11}a_{22}a_{33}x_2^2 \,.\, S_1\,, \\ A'C' - B'^2 &= b_{11}b_{22}b_{33}x_2^2 \,.\, S_2\,, \\ AC' + A'C - 2BB' &= x_2^2 \,.\, F\,. \end{aligned}$$

$F = 0$ stellt den Kegelschnitt dar, auf dem die acht Berührungspunkte der gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte liegen, also die harmonische Kovariante erster Art. Die Gleichung des

[1]) Salmon — Fiedler, a. a. O. II. 7. Aufl. 1918. S. 199 ff.

gesuchten geometrischen Ortes läßt sich also auch in der Form schreiben:[1])

(41a) $$4(1+d)^2 k S_1 S_2 - (1-d)^2 F^2 = 0 .$$

Dabei ist $k = k_1 . k_2 = a_{11} a_{22} a_{33} b_{11} b_{22} b_{33}$.

Ist S_1 in der allgemeinen Form gegeben:

$$S_1 = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

so wird:[2])

$$k_1 = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = acf + 2bed - ae^2 - b^2 f - cd^2 .$$

Eine entsprechende Größe ergibt sich für k_2, sodaß Gleichung (41a) vollständig bestimmt ist, wenn die Grundkegelschnitte in allgemeiner Form vorliegen. Ist $d = e = 0$ und $f = +(ac - b^2)$, dann hebt sich der Faktor f^2 bei der Umwandlung der Gleichung aus Punkt- in Linienkoordinaten weg, und es wird in diesem Sonderfalle:

$$AC - B^2 = x_2^2 . S_1$$

Gleichung (41a) liefert für $d = 1$ die Gleichungen der Grundkegelschnitte; $d = -1$ ergibt $F^2 = 0$, die doppelt zu zählende harmonische Kovariante erster Art.

Sollen die an die Grundkegelschnitte gehenden Tangenten ein äquianharmonisches Doppelverhältnis bilden, so muß sein: $d = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; die Gleichung der äquianharmonischen Kovariante ist demnach:

$$12(AC - B^2)(A'C' - B'^2) + (AC' + A'C - 2BB')^2 = 0 .$$

Für die harmonische Kovariante zweiter Art ist $d = 2$, sodaß die Gleichung der gesuchten Kurve die Form hat:

$$36(AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + A'C - 2BB')^2 = 0 .$$

Für $d = 0$ oder $d = \infty$ fallen zwei Tangenten verschiedener Kegelschnitte zusammen. Die Gleichung:

$$4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + A'C - 2BB')^2 = 0,$$

die die Resultante zweier Gleichungen von der Form (41) ist, ist daher identisch mit der Gleichung für die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Grundkegelschnitte, die zugleich Doppeltangenten der Kovarianten sind.

---

[1]) Salmon — Fiedler, 1918. S. 231.

[2]) Salmon — Fiedler, 1918. S. 201.

Je zwei von ihnen befriedigen folgende Gleichungen:

$$T_1 T_2 = AC' - A'C + 2\sqrt{(BC' - B'C)(AB' - A'B)} = 0,$$

$$T_3 T_4 = AC' - A'C - 2\sqrt{(BC' - B'C)(AB' - A'B)} = 0.$$

Es ist also:

$$T_1 T_2 T_3 T_4 = (AC' - A'C)^2 - 4(BC' - B'C)(AB' - A'B)$$

$$= -4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) + (AC' + A'C - 2BB')^2 .$$

Die Gleichung jeder Quartik, also auch die allgemeine Kovariantengleichung, kann nun auf die beiden Formen gebracht werden:

(43a) $$\mu k S_1 S_2 - F^2 = 0 ,$$

(43b) $$T_1 T_2 T_3 T_4 + m F^2 = 0 .$$

Für den Parameter m ergibt sich durch Vergleichung von (43b) und (43) der Wert:

(44) $$m = -\frac{4d}{(1+d)^2} .$$

Die Gleichungen der Kovarianten vom Doppelverhältnis d zweier Kegelschnitte lassen sich also auch aufstellen aus den Gleichungen der vier gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte und der Gleichung desjenigen, der durch ihre Berührungspunkte geht; sie sind von der Form:

$$(1+d)^2 T_1 T_2 T_3 T_4 - 4d F^2 = 0 .$$

Umgekehrt kann man folgendermaßen schließen:

Ist eine Kurve vierter Ordnung in der Form gegeben:

$$T_1 T_2 T_3 T_4 + m F^2 = 0,$$

so ist sie eine Kovariante vom Doppelverhältnis d zweier Kegelschnitte, deren gemeinsame Tangenten sich für $m = 0$ ergeben. Die Kegelschnitte selbst findet man für $m = -1$, denn dann ist $d = 1$. *Allgemein ist der Wert des Doppelverhältnisses, den das Tangentenquadrupel aus jedem Punkte der gegebenen Kurve vierter Ordnung an die beiden Kegelschnitte bildet, bestimmt durch die Gleichung:*

(45) $$d = \frac{-(2+m) \pm 2\sqrt{1+m}}{m} .$$

Das doppelte Vorzeichen der Wurzel hat dabei die Bedeutung, daß sich zwei zu einander reziproke Werte des Doppelverhältnisses ergeben, denn es ist:

$$\frac{-(2+m)+2\sqrt{1+m}}{m} = \frac{m}{-(2+m)-2\sqrt{1+m}} .$$

Es ist also nur die Zuordnung der konjugierten Elemente des Doppelverhältnisses vertauscht.

Ein derartiges Büschel von Quartiken liefert ein von Wieleitner angeführtes Beispiel[1]):
$(x+y+1)(x+y-1)(x-y+1)(x-y-1)+\lambda(4x^2+4y^2-3)^2=0$,
bei dem aber dort die oben besprochene geometrische Bedeutung der einzelnen Kurven vierter Ordnung nicht festgestellt worden ist. Die Parameterwerte stimmen überein mit den hier allgemein gefundenen bis auf einen konstanten Faktor, der sich aus der besonderen Wahl der Gleichung $F=0$ ergibt.

Eine analoge Betrachtung der Gleichung (43a), wie sie für (43b) durchgeführt wurde, liefert folgendes Ergebnis: Sind $S_1=0$, $S_2=0$ die Gleichungen zweier Kegelschnitte, und ist $F=0$ die Gleichung des Kegelschnittes, der durch die Berührungspunkte ihrer gemeinsamen Tangenten geht, so sind die Grundkegelschnitte, ihre gemeinsamen Tangenten und die Kovarianten vom Doppelverhältnis d Kurven des Büschels:

$$\mu k S_1 S_2 - F^2 = 0,$$

wo k sich aus den Koeffizienten der Kegelschnittsgleichungen zusammensetzt, und wo $\mu = 4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2$ ist.

Als Beispiel für ein solches Büschel von Kurven vierter Ordnung läßt sich wieder das Wieleitnersche anführen. Die Gleichungen der Grundkegelschnitte sind:

$$2x^2(2-\sqrt{2})+2y^2(2+\sqrt{2})-1=0,$$
$$2x^2(2+\sqrt{2})+2y^2(2-\sqrt{2})-1=0.$$

Das Beispiel gehört also zu dem von uns im § 1 betrachteten der zwei kongruenten Ellipsen, und zwar zu II, denn es ist:

$$a^2=\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}=(3+2\sqrt{2})\frac{1}{2(2+\sqrt{2})}=(3+2\sqrt{2})b^2=\varepsilon_1^{-1}b^2.$$

Infolgedessen gehört der harmonischen Kovariante zweiter Art der Anfangspunkt als isolierter Punkt an, wie dort auch bei der Kurvendiskussion gefunden wird.

Aehnlich wie vorher kann man durch Umkehrung der Betrachtungen zu dem Satz kommen:

Jede Kurve vierter Ordnung, deren Gleichung auf die Form gebracht worden ist: $\mu k S_1 S_2 - F^2 = 0$, ist der geometrische Ort aller Punkte, von denen aus vier in einem bestimmten Doppelverhältnis d stehende Tangenten gezogen werden können an die beiden Kegel-

[1]) Wieleitner, a. a. O. S. 260.

schnitte, die sich für $\mu = \infty$ ergeben. Dieses Doppelverhältnis bestimmt sich mit Hilfe des betreffenden Parameterwertes μ aus der Gleichung:

$$d = \frac{\pm\sqrt{\mu} - 2}{\pm\sqrt{\mu} + 2} \tag{46}$$

Das doppelte Vorzeichen der Wurzel hat dabei eine analoge Bedeutung wie oben.

§ 5.

Die Kovarianten als Hüllkurven von Kegelschnitten.

Aus der allgemeinen Theorie der Kurven vierter Ordnung ist bekannt, daß jede Quartik sich darstellen läßt in der Form: $UV = W^2$, wo $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ Kegelschnittgleichungen sind, und sie ist dann Hüllkurve des veränderlichen Kegelschnittes:

$$v^2 U + 2v W + V = 0.$$

Da die Kovarianten vom Doppelverhältnis d im allgemeinen Kurven vierter Ordnung sind, sind sie Hüllkurven von Kegelschnitten der Form:

$$v^2\sqrt{\lambda \cdot k} \cdot S_1 + 2v F + \sqrt{vk} \cdot S_2 = 0. \tag{47}$$

Dabei ist $\lambda = 4\,(\frac{1+d}{1-d})^2$.

In der Tat kann man auch aus dieser Gleichung die von Thomae aufgestellten Formen erhalten, wenn man wieder die dort benutzten Größen A, B, C einführt. Die Gleichung der Hüllkurve des obigen Kegelschnittes ergibt sich aus:

$$f = v^2 \cdot \sqrt{\lambda \cdot k}\,\frac{AC - B^2}{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}} + 2v\,(AC' + A'C - 2BB') + \sqrt{\lambda \cdot k}\,\frac{A'C' - B'^2}{b_{11}\,b_{22}\,b_{33}} = 0$$

und $\dfrac{\partial f}{\partial v} = 2v\sqrt{\lambda \cdot k}\,\dfrac{AC - B^2}{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}} + 2\,(AC' + A'C - 2BB') = 0$

zu:

$$4\,(\frac{1+d}{1-d})^2 (AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + A'C - 2BB')^2 = 0.$$

Diese Tatsache läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Es ist möglich, jede Kovariante von vorgegebenem Doppelverhältnis d zweier Kegelschnitte als Hüllkurve eines veränderlichen Kegelschnittes zu konstruieren, ohne daß es nötig ist, ihre Gleichung aufzustellen.[1])

[1]) Siehe Figur 14.

§ 6.

„Charakteristischer Wert" der Kovarianten.

Die in allen Problemen, bei denen es sich um die harmonische Kovariante zweiter Art handelt, auftretende Größe $\varepsilon_1 = (3 - 2\sqrt{2})$ und ihre positiven und negativen Potenzen legen die Vermutung nahe, daß sich für jede Kovariante vom Doppelverhältnis d zweier Kegelschnitte ein derartiger Wert finden läßt, den man als „charakteristischen Wert" der betreffenden Kovariante bezeichnen kann, weil er für die Gestalt der Kurve von ausschlaggebender Bedeutung ist. Er ist bestimmend für das Auftreten von Singularitäten, für das Vorhandensein reeller Asymptoten, für die Umwandlung der Kurve aus der einen Grundform der Quartiken in eine andere, wie sie von Zeuthen [1]) untersucht und beschrieben worden sind. Eine solche Umwandlung ist z. B. das Zusammenschrumpfen eines Ovals der Kurve zu einem isolierten Punkt (§ 1, Fall I und II) oder umgekehrt der Uebergang von einem isolierten Punkt zu einem Oval (§ 3, Fall VI und VII).

Aus der allgemeinen Gleichung (41a) der Kovariante findet man den „charakteristischen Wert", wenn man die Bedingungen dafür aufsucht, daß das Absolutglied oder der Koeffizient der höchsten Potenzen der Variabeln verschwindet. Sind die Kegelschnitte auf ihr gemeinsames Polardreieck bezogen, dann hat (41a) die Form:

$$4\left(\frac{1+d}{1-d}\right)^2 a_{11}a_{22}a_{33}b_{11}b_{22}b_{33}(a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33})(b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33})$$
$$-[x^2a_{11}b_{11}(a_{22}b_{33}+a_{33}b_{22})+y^2a_{22}b_{22}(a_{11}b_{33}+a_{33}b_{11})+a_{33}b_{33}(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})]^2 = 0,$$

und die oben angeführte Bedingung wird z. B. für das Absolutglied:

$$4(1+d)^2a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - (1-d)^2(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11})^2 = 0.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn $a_{11}b_{22} = c\,a_{22}b_{11}$ ist, und daraus erhält man die Gleichung für den „charakteristischen Wert" c:

$$4c(1+d)^2 - (1+c)^2(1-d)^2 = 0,$$
$$c^2(1-d)^2 - 2c(1+6\,d+d^2) + (1-d)^2 = 0,$$
$$c = \frac{d^2+6d+1 \pm 4(1+d)\sqrt{d}}{(1-d)^2} = \frac{(1\pm\sqrt{d})^4}{(1-d)^2},$$

$$c = \frac{(1\pm\sqrt{d})^4}{(1-d)^2}. \tag{48}$$

[1]) Zeuthen, a. a. O.

Für $d = 2$, also für die harmonische Kovariante zweiter Art, gibt das: $\bar{c} = (1 \pm \sqrt{2})^4 = (3 \pm 2\sqrt{2})^2$.

Bei der äquianharmonischen Kovariante ist

$$d = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \text{ also:}$$

$$c' = -(7 \pm 4\sqrt{3}) = -(2 \pm \sqrt{3})^2 .$$

Das ist aber in der Tat diejenige Größe, die in der Abhandlung Thomaes über die äquianharmonische Kovariante[1]) eine bedeutende Rolle spielt.

Setzen wir:

(48a)
$$c_1 = \frac{(1 + \sqrt{d})^4}{(1 - d)^2},$$
$$c_2 = \frac{(1 - \sqrt{d})^4}{(1 - d)^2},$$

so gilt stets die Gleichung: $c_1 c_2 = 1$ oder:

$$c_2 = c_1^{-1}.$$

[1]) Leipziger Berichte, Bd. 64, 1912. S. 450.

Abschnitt III.

Kovarianten und Kontravarianten zweier Kegelschnitte.

§ 7.

Allgemeine Definitionen und Sätze für Kontravarianten.

Da die bisher betrachteten Eigenschaften der Kovarianten rein projektiver Natur sind, kann man ohne weiteres das Dualitätsprinzip anwenden. Es ergeben sich dann kontravariante Kurven zweier Kegelschnitte[1]), und man kommt zu den folgenden Definitionen und Sätzen:

Die harmonische Kontravariante erster Art ist die Enveloppe aller Geraden, die zwei gegebene Kegelschnitte in vier harmonischen Punkten schneiden, sodaß die Schnittpunkte mit ein und demselben Kegelschnitt konjugierte Elemente sind. Diese Kurve findet in der Literatur Erwähnung als „harmonische Kurve zweiter Klasse" oder „v. Staudtsche Kurve."[2]) Sie hat als Tangenten die acht Tangenten der vier Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte, und diese Geraden schneiden die gegebenen Kegelschnitte nur in zwei Punkten. Sie müssen also gleichzeitig auch den andern Kontravarianten vom Doppelverhältnis δ als Tangenten angehören. Die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte sind gleichzeitig Doppelpunkte der Kontravarianten, insbesondere der harmonischen Kontravariante zweiter Art. Diese Kurve ist die Enveloppe aller Geraden, die die beiden Grundkegelschnitte in vier harmonischen Punkten schneiden derart, daß die auf verschiedenen Kegelschnitten liegenden Schnittpunkte einander zugeordnet sind. Eine analoge Definition läßt sich für

[1]) Salmon — Fiedler, II. 1918 S. 226.
[2]) Salmon — Fiedler, II. 1918. S. 233.
Pascal, a. a. O. S. 248.

die äquianharmonische Kontravariante aufstellen. Die Kontravarianten vom Doppelverhältnis δ sind im allgemeinen Kurven vierter Klasse. Berühren sich die Kegelschnitte doppelt, so gehen auch die Kontravarianten durch diese Berührungspunkte hindurch.

Sind die Gleichungen zweier Kegelschnitte, die man als Erzeugnis ihrer Tangenten auffaßt, $\Sigma_1 = 0$ und $\Sigma_2 = 0$, und ist $\Phi = 0$ die Gleichung desjenigen Kegelschnittes, der die acht Tangenten beider als Tangenten hat, so ist

(49) $$4(1+\delta)^2 \varkappa \Sigma_1 \Sigma_2 - (1-\delta)^2 \Phi^2 = 0$$

die Gleichung der Kurve vierter Klasse, deren Tangenten die gegebenen Kegelschnitte im Doppelverhältnis δ schneiden. Dabei ist

$$\varkappa = \varkappa_1 \varkappa_2 = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33},$$

wo die α_{ii} bzw. β_{kk} die den a_{ii}, b_{kk} entsprechenden Größen sind, wenn die Gleichungen der Kegelschnitte in Linienkoordinaten vorliegen.

Setzt man:

$$\Sigma_1 = \frac{B^2 - A\Gamma}{\alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}u_2^2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{B'^2 - A'\Gamma'}{\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33}u_2^2},$$

$$\frac{1}{u_2^2}(A\Gamma' + A'\Gamma - 2BB') = \Phi,$$

so ergibt sich eine Gleichung, die der Thomaeschen analog gebaut ist:

(49a) $$4(1+\delta)^2 (B^2 - A\Gamma)(B'^2 - A'\Gamma') - (A'\Gamma + A\Gamma' - 2BB')^2 = 0.$$

Die Kontravarianten vom Doppelverhältnis δ sind Hüllkurven aller gemeinsamen Tangenten zweier unendlich benachbarten Kegelschnitte der Schar, die in Linienkoordinaten folgende Gleichung hat:

(50) $$r^2\sqrt{\lambda \cdot \varkappa}\,\Sigma_1 + 2r\Phi + \sqrt{\lambda \cdot \varkappa}\,\Sigma_2 = 0.$$

Auch hier hat man also die Möglichkeit, die Kurven ihrer Gestalt nach zu bestimmen, ohne daß die entsprechenden Gleichungen bekannt sind.

§ 8.

Kovarianten und Kontravarianten zweier kongruenten konzentrischen Ellipsen.

Die im ersten Teil der Arbeit betrachteten drei Fälle von je zwei Kegelschnitten bieten gleichzeitig Beispiele für engere Bezie-

hungen, die zwischen Kovarianten und Kontravarianten zweier Kegelschnitte bestehen können. Für zwei kongruente konzentrische Ellipsen, deren Hauptachsen einen rechten Winkel mit einander bilden[1]), sollen die allgemeine Kovarianten- und die allgemeine Kontravariantengleichung aufgestellt werden. Die Gleichungen der Grundkegelschnitte sind in den früheren Bezeichnungen:

$$S_1 = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \text{ oder } \Sigma_1 = a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0 ,$$
$$S_2 = a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0 \text{ oder } \Sigma_2 = b^2u^2 + a^2v^2 - 1 = 0 .$$

Die harmonische Kovariante erster Art und ihre duale Kurve haben die Gleichungen:

$$F = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (a^4 + b^4) = 0 ,$$
$$\Phi = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2)\, a^2b^2 - (a^4 + b^4) = 0 .$$

Die allgemeine Kovariantengleichung ist dann:

$$G = 4(1 + d)^2 (b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2)$$
$$- (1 - d)^2 [(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)\, a^2b^2 - (a^4 + b^4)]^2 = 0,$$

während die allgemeine Kontravariantengleichung lautet:

$$\Gamma = 4(1 + \delta)^2 a^4b^4 (a^2u^2 + b^2v^2 - 1)(b^2u^2 + a^2v^2 - 1)$$
$$- (1 - \delta)^2 [(u^2 + v^2)(a^2 + b^2)\, a^2b^2 - (a^4 + b^4)]^2 = 0 .$$

Wir bilden noch die Polarreziproken aller dieser Kurven in bezug auf die Leitkurve:[2]) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$.

Ihre Gleichungen sind:

$$S_1 = b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2 = 0 \text{ oder } \Sigma_1 = a^2x^2 + b^2y^2 - 1 = 0 ,$$
$$S_2 = a^2u^2 + b^2v^2 - a^2b^2 = 0 \text{ oder } \Sigma_2 = b^2x^2 + a^2y^2 - 1 = 0 ,$$
$$F = (u^2 + v^2)(a^2 + b^2) - (a^4 + b^4) = 0 ,$$
$$\Phi = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)\, a^2b^2 - (a^4 + b^4) = 0 ,$$
$$G = 4(1 + d)^2 (b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2)(a^2u^2 + b^2v^2 - a^2b^2)$$
$$- (1 - d)^2 [(u^2 + v^2)(a^2 + b^2) - (a^4 + b^4)]^2 = 0 ,$$
$$\Gamma = 4(1 + \delta)^2 (a^2x^2 + b^2y^2 - 1)(b^2x^2 + a^2y^2 - 1)\, a^4b^4$$
$$- (1 - \delta)^2 [(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)\, a^2b^2 - (a^4 + b^4)]^2 = 0 .$$

Sind nun die Ellipsenachsen so beschaffen, daß die Nebenachse der reziproke Wert der Hauptachse ist, ist also $a^2b^2 = 1$, so stimmen die Polarreziproken in bezug auf $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ der Kovarianten überein mit den Kontravarianten desselben Doppelverhältnisses und umgekehrt. Der vollständigen Symmetrie wegen spielt es keine Rolle, daß durch das Polarisieren die eine Ellipse übergeht in die um 90° gegen die ursprüngliche gedrehte Ellipse.

[1]) Siehe § 1.

[2]) Salmon — Fiedler, II, 1918. S. 342.

Wir kommen also zu folgendem Ergebnis:

Bei zwei um 90^0 gegen einander gedrehten Ellipsen, die kongruent sind und einen gemeinsamen Mittelpunkt haben, und deren Achsen zu einander reziprok sind, sind Kovarianten und Kontravarianten von demselben Doppelverhältnis polarreziproke Kurven mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ als Leitkurve.

Auch die vier Schnittpunkte und die vier gemeinsamen Tangenten der beiden Ellipsen gehören zu diesen Kurven. Ihre Gleichungen ergeben sich für $d = 0$. Ist also $a^2 b^2 = 1$, so ist die Gleichung der vier gemeinsamen Tangenten:

$$(x^2 - y^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)^2 = 0,$$

sodaß die einzelnen Tangenten bestimmt sind durch verschiedene Vorzeichenkombinationen in dem Ausdruck:

$$\pm x \pm y + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \ .$$

Für die Schnittpunkte ergeben sich die analogen Gleichungen folgendermaßen:

$$(u^2 - v^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) + (a^2 + b^2)^2 = 0 \ ,$$

$$\pm u \pm v + \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \ .$$

Das obige Ergebnis gilt also auch für die zerfallenden Kurven in Gerade bzw. Punkte.

§ 9.

Kovarianten und Kontravarianten eines Systems sich in zwei festen Hauptscheiteln berührender Ellipsen und Hyperbeln.

Im § 2, bei dem als Grundkegelschnitte eine Ellipse und eine Hyperbel betrachtet wurden, führt der Sonderfall IV der sich in den Hauptscheiteln berührenden Ellipse und Hyperbel bei der Verallgemeinerung auf ein System derartiger Kurven, für die sich Kovarianten und Kontravarianten feststellen lassen.

Sind die Gleichungen der Büschel von Ellipsen und Hyperbeln:

$$\begin{aligned} \lambda^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 \lambda^2 &= 0 \ , \\ \lambda_1^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 \lambda_1^2 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{51}$$

wo λ und λ_1 zwei von einander unabhängig sich ändernde Größen sind, so lautet die allgemeine Kovariantengleichung:

$$\begin{aligned} &4(1+d)^2 (\lambda^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 \lambda^2)(\lambda_1^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 \lambda_1^2) \\ &\quad - (1-d)^2 [x^2 (\lambda^2 - \lambda_1^2) - a^2 (\lambda^2 - \lambda_1^2) + 2a^2 y^2]^2 = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &(x^2 - a^2)^2 [(1-d)^2 (\lambda^2 + \lambda_1^2)^2 + 16 d \lambda^2 \lambda_1^2] \\ &- 16 d a^2 (\lambda^2 - \lambda_1^2)(x^2 - a^2) y^2 - 16 d a^4 y^4 = 0. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung läßt sich als Produkt folgendermaßen schreiben:

$$\{(x^2-a^2)[\lambda^2(1+\sqrt{d})^2+\lambda_1^2(1-\sqrt{d})^2]+4\sqrt{d}\,a^2y^2\}$$
$$\{(x^2-a^2)[\lambda^2(1-\sqrt{d})^2+\lambda_1^2(1+\sqrt{d})^2]-4\sqrt{d}\,a^2y^2\}=0.$$

Die Kurve zerfällt demnach in die beiden Kegelschnitte:

$$\text{(52)}\qquad \begin{aligned}\bar{\lambda}^2x^2+a^2y^2-a^2\bar{\lambda}^2&=0,\\ \bar{\lambda}_1^2x^2-a^2y^2-a^2\bar{\lambda}_1^2&=0.\end{aligned}$$

Dabei sind die Größen der Halbachsen bestimmt durch folgende Gleichungen:

$$\text{(52a)}\qquad \begin{aligned}\bar{\lambda}^2&=\frac{\lambda^2(1+\sqrt{d})^2+\lambda_1^2(1-\sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}},\\ \bar{\lambda}_1^2&=\frac{\lambda^2(1-\sqrt{d})^2+\lambda_1^2(1+\sqrt{d})^2}{4\sqrt{d}},\end{aligned}$$

sodaß die Beziehung besteht:

$$\bar{\lambda}^2-\bar{\lambda}_1^2=\lambda^2-\lambda_1^2.$$

Die durch die Gleichungen (52) definierten Kegelschnitte sind die Kovariante vom Doppelverhältnis d für die gegebenen Kegelschnitte mit den Achsen λ und λ_1.

$d=0$ liefert die Gleichung $x^2=a^2$, also die der Tangenten in den Berührungspunkten; für $d=1$ wird $\bar{\lambda}^2=\lambda^2$, $\bar{\lambda}_1^2=\lambda_1^2$, die kovarianten Kegelschnitte sind identisch mit den Grundkegelschnitten.

Soll $d=-1$ sein, so wird $\bar{\lambda}^2=-\bar{\lambda}_1^2=\frac{\lambda^2-\lambda_1^2}{2}$; die harmonische Kovariante erster Art besteht demnach nur aus dem einen Kegelschnitt:

$$(\lambda^2-\lambda_1^2)x^2+2a^2y^2-(\lambda^2-\lambda_1^2)a^2=0,$$

der je nach der Beschaffenheit von λ und λ_1 verschiedene Gestalt hat.

Für $d=2$ wird:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}^2&=\frac{\lambda^2\varepsilon_1^{-1}+\lambda_1^2\varepsilon_1}{4\sqrt{2}},\\ \bar{\lambda}_1^2&=\frac{\lambda^2\varepsilon_1+\lambda_1^2\varepsilon_1^{-1}}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

und diese Größen stimmen überein mit den früher gefundenen für den einzelnen Fall.[1])

[1]) Siehe § 2.

Umgekehrt kann man folgendermaßen schließen: Ist ein Büschel von Ellipsen und ein Büschel von Hyperbeln gegeben, die denselben Mittelpunkt und dieselben Achsenrichtungen haben, und die einander in zwei festen Hauptscheiteln berühren, so stehen die einzelnen Kurven der Büschel zu einander in Beziehung. Es läßt sich das Doppelverhältnis bestimmen, in dem vier von einem Punkte einer der Kurven an zwei ungleichartige Kegelschnitte gehende Tangenten stehen. Gegeben sind in diesem Falle die Größen λ, λ_1 und $\bar{\lambda}$ oder $\bar{\lambda}_1$, je nachdem ein Punkt einer Ellipse oder einer Hyperbel als Ausgangspunkt gewählt wird. Dann ist d bestimmt durch die Gleichungen:

$$\sqrt{d_1} = \frac{2\bar{\lambda}^2 - \lambda^2 + \lambda_1^2 \pm 2\sqrt{(\bar{\lambda}^2 + \lambda_1^2)(\bar{\lambda}^2 - \lambda^2)}}{\lambda^2 + \lambda_1^2},$$

(53) bzw.

$$\sqrt{d_2} = \frac{2\bar{\lambda}_1^2 + \lambda^2 - \lambda_1^2 \pm 2\sqrt{(\bar{\lambda}_1^2 + \lambda^2)(\bar{\lambda}_1^2 - \lambda_1^2)}}{\lambda^2 + \lambda_1^2}.$$

Auf analoge Weise lassen sich die Betrachtungen durchführen für die Kontravarianten desselben Systems sich in zwei festen Hauptscheiteln berührender Ellipsen und Hyperbeln, die dargestellt sind durch die Gleichungen:

(51a)
$$a^2u^2 + \lambda^2v^2 - 1 = 0,$$
$$a^2u^2 - \lambda_1^2v^2 - 1 = 0.$$

Die allgemeine Kontravariantengleichung lautet dann:

$$4(1+\delta)^2(-\lambda^2\lambda_1^2)(a^2u^2 + \lambda^2v^2 - 1)(a^2u^2 - \lambda_1^2v^2 - 1) - (1-\delta)^2[(a^2u^2 - 1)(\lambda^2 - \lambda_1^2) - 2\lambda^2\lambda_1^2v^2]^2 = 0$$

oder:

$$(a^2u^2 - 1)^2[(1-\delta)^2(\lambda^2 + \lambda_1^2)^2 + 16\delta\lambda^2\lambda_1^2] + 16\delta\lambda^2\lambda_1^2(\lambda^2 - \lambda_1^2)(a^2u^2 - 1)v^2 - 16\delta\lambda^4\lambda_1^4v^4 = 0,$$

$$\{(a^2u^2 - 1)[\lambda^2(1+\sqrt{\delta})^2 + \lambda_1^2(1-\sqrt{d})^2] - 4\sqrt{\delta}\lambda^2\lambda_1^2v^2\}$$

$$\{(a^2u^2 - 1)[\lambda^2(1-\sqrt{\delta})^2 + \lambda_1^2(1+\sqrt{\delta})^2] + 4\sqrt{\delta}\lambda^2\lambda_1^2v^2\} = 0.$$

Die kontravariante Kurve zerfällt demnach in die beiden Kegelschnitte:

(54)
$$a^2u^2 + \bar{\bar{\lambda}}^2v^2 - 1 = 0 \text{ oder } \bar{\bar{\lambda}}^2x^2 + a^2y^2 - a^2\bar{\bar{\lambda}}^2 = 0,$$
$$a^2u^2 - \bar{\bar{\lambda}}_1^2v^2 - 1 = 0 \text{ oder } \bar{\bar{\lambda}}_1^2x^2 - a^2y^2 - a^2\bar{\bar{\lambda}}_1 = 0,$$

und die Halbachsen sind bestimmt durch die Werte:

(54a)
$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \frac{4\sqrt{\delta}\lambda^2\lambda_1^2}{\lambda^2(1-\sqrt{\delta})^2 + \lambda_1^2(1+\sqrt{\delta})^2},$$
$$\bar{\bar{\lambda}}_1^2 = \frac{4\sqrt{\delta}\lambda^2\lambda_1^2}{\lambda^2(1+\sqrt{\delta})^2 + \lambda_1^2(1-\sqrt{\delta})^2}.$$

Es besteht die Gleichung:

$$\frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}^2} - \frac{1}{\bar{\bar{\lambda}}_1^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_1^2}.$$

$\delta = 0$ liefert die Gleichungen der Berührungspunkte: $u^2 = \frac{1}{a^2}$.

Für $\delta = 1$ fallen die kontravarianten Kegelschnitte mit den Grundkegelschnitten zusammen. Ist $\delta = -1$, so wird

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = -\bar{\bar{\lambda}}_1^2 = \frac{2\lambda^2\lambda_1^2}{-(\lambda^2 - \lambda_1^2)},$$

und die harmonische Kontravariante erster Art hat die Gleichung:

$$(\lambda^2 - \lambda_1^2)\, a^2u^2 - 2\lambda^2\lambda_1^2 v^2 - (\lambda^2 - \lambda_1^2) = 0.$$

Die Halbachsen der Kegelschnitte, die die harmonische Kontravariante zweiter Art bilden, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \frac{4\sqrt{2}\,\lambda^2\lambda_1^2}{\lambda^2\varepsilon_1 + \lambda_1^2\varepsilon_1^{-1}},$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_1^2 = \frac{4\sqrt{2}\,\lambda^2\lambda_1^2}{\lambda^2\varepsilon_1^{-1} + \lambda_1^2\varepsilon_1}.$$

Umgekehrt gilt:

Das Doppelverhältnis δ, in welchem eine Tangente an einen Kegelschnitt des Systems eine Ellipse und eine Hyperbel mit den Nebenachsen λ bezw. λ_1 schneidet, läßt sich finden aus den Gleichungen:

(55)
$$\sqrt{\delta_1} = \frac{2\lambda^2\lambda_1^2 + \bar{\lambda}^2(\lambda^2 - \lambda_1^2) + 2\lambda\lambda_1\sqrt{(\lambda^2 - \bar{\lambda}^2)(\lambda_1^2 + \bar{\lambda}^2)}}{\bar{\lambda}^2(\lambda^2 + \lambda_1^2)},$$

$$\sqrt{\delta_2} = \frac{2\lambda^2\lambda_1^2 - \bar{\lambda}_1^2(\lambda^2 - \lambda_1^2) \pm 2\lambda\lambda_1\sqrt{(\lambda^2 + \bar{\lambda}_1^2)(\lambda_1^2 - \bar{\lambda}_1^2)}}{\bar{\lambda}_1^2(\lambda^2 + \lambda_1^2)},$$

je nachdem die Tangente eine Ellipsen — oder eine Hyperbeltangente ist.

Die kovarianten und kontravarianten Kegelschnitte zweier Grundkegelschnitte für dasselbe Doppelverhältnis stehen in den Büscheln in einem bestimmten Zusammenhang, sodaß sich die Achsen der einen Art aus denen der andern Art berechnen lassen. Es gelten nämlich die Beziehungen:

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \frac{\lambda^2\lambda_1^2}{\bar{\lambda}_1^2} \quad \text{und} \quad \bar{\bar{\lambda}}_1^2 = \frac{\lambda^2\lambda_1^2}{\bar{\lambda}^2},$$

$$\lambda^2 = \frac{\bar{\lambda}^2\bar{\lambda}_1^2}{\bar{\bar{\lambda}}_1^2} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}_1^2 = \frac{\bar{\lambda}^2\bar{\lambda}_1^2}{\bar{\bar{\lambda}}^2}.$$

und beim Einsetzen dieser Größen in (53) und (55) findet man:

$$d_1 = \delta_2 \quad , \quad d_2 = \delta_1 .$$

In Worten läßt sich dieses Ergebnis folgendermaßen ausdrücken:

Sind zwei Grundkegelschnitte des Systems gegeben mit den halben Nebenachsen λ und λ_1 und eine demselben System angehörende Ellipse mit der Nebenhalbachse[1] *$\bar{\lambda}$, sodaß die vier Tangenten von einem ihrer Punkte an die Grundkegelschnitte das Doppelverhältnis d haben, so ist die halbe imaginäre Achse derjenigen Hyperbel, deren Tangenten die Grundkegelschnitte in dem gleichen Doppelverhältnis d schneiden, bestimmt durch die Gleichung* $\bar{\bar{\lambda}}_1 = \dfrac{\lambda \lambda_1}{\bar{\bar{\lambda}}}$.

Analoge Sätze ergeben sich, wenn man von einem Hyperbelpunkte ausgeht, oder wenn man von kontravarianten auf kovariante Kegelschnitte des Systems schließt.

Ist $\lambda^2 = \lambda_1^2$, dann wird auch $\bar{\lambda}^2 = \bar{\lambda}_1^2$ und $\bar{\bar{\lambda}}^2 = \bar{\bar{\lambda}}_1^2$. Für den Sonderfall $\lambda^2 = \lambda_1^2 = a^2$, d. h. für Kreis und gleichseitige Hyperbel als Grundkegelschnitte, ergibt sich:

$$\bar{\lambda}^2 = \bar{\lambda}_1^2 = a^2 \frac{1 + d}{\sqrt{d}} ,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \bar{\bar{\lambda}}_1^2 = a^2 \frac{\sqrt{\delta}}{1 + \delta} .$$

Sind die Kegelschnittbüschel so beschaffen, daß stets die Beziehung besteht: $\lambda^2 \lambda_1^2 = 1$, dann wird:

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} \quad ; \quad \bar{\bar{\lambda}}_1^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} .$$

Der Koeffizient von y^2 in der Gleichung der harmonischen Kontravariante erster Art ist dann gleich dem negativen reziproken Werte des Koeffizienten von y^2 in der Gleichung der harmonischen Kovariante erster Art. Ist der eine Kegelschnitt eine Ellipse, so ist der andere eine Hyperbel und umgekehrt.

Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen:

In einem Büschel von Kurven vierter Ordnung, der besteht aus je zwei sich in zwei festen Hauptscheiteln berührenden Ellipsen und

---

[1]) Siehe S. 50.

Hyperbeln mit den Nebenachsen λ bezw. λ_1, für die die Beziehung besteht: $\lambda^2 = \frac{1}{\lambda_1^2}$, sind diejenigen Kegelschnitte, deren Achsen bestimmt sind durch die Gleichung

$$\bar{\lambda}^2 = \frac{1}{\bar{\lambda}_1^2} = \frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{2},$$

harmonische Kovariante und harmonische Kontravariante erster Art der beiden ursprünglichen Kegelschnitte.

§ 10.

Kovarianten und Kontravarianten zweier konzentrischen Büschel ähnlicher Hyperbeln, deren Achsen einen rechten Winkel bilden.

Sind zwei derartige Büschel gegeben, so ist das eine Verallgemeinerung des früher betrachteten Falles der beiden Hyperbeln, für deren Achsen die Gleichung besteht $a^2 b_1^2 = a_1^2 b^2$. Es läßt sich zeigen, daß zwei Hyperbeln der Büschel zusammen eine Kovariante vom Doppelverhältnis d für zwei andere Hyperbeln des Systems bilden, und daß wieder zwei andere derartige Hyperbeln eine Kontravariante der gegebenen Hyperbeln darstellen.

Die Büschel von Hyperbeln seien dargestellt durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda_1^2} = 1, \\ &-\frac{x^2}{m\lambda^2} + \frac{y^2}{m\lambda_1^2} = 1, \end{aligned} \tag{57}$$

wo λ und λ_1 von einander unabhängige Veränderliche bedeuten, und wo m einen beliebigen Proportionalitätsfaktor darstellt.

Die allgemeine Kovariantengleichung hat dann die Form:

$$\begin{aligned} &4(1+d)^2 m (x^2\lambda_1^2 - y^2\lambda^2 - \lambda^2\lambda_1^2)(-x^2\lambda_1^2 + y^2\lambda^2 - m\lambda^2\lambda_1^2) \\ &-(1-d)^2 [(x^2\lambda_1^2 - y^2\lambda^2, (m-1) - 2m\lambda^2\lambda_1^2]^2 = 0. \end{aligned}$$

Die Kurve zerfällt in zwei Hyperbeln mit den Gleichungen:

$$\begin{aligned} &x^2\lambda_1^2 [m(1+\sqrt{d})^2 + (1-\sqrt{d})^2] + y^2\lambda^2 [m(1+\sqrt{d})^2 \\ &+ (1-\sqrt{d})^2] + 4\sqrt{d}\, m\lambda^2\lambda_1^2 = 0, \\ &x^2\lambda_1^2 [(1+\sqrt{d})^2 + m(1-\sqrt{d})^2] - y^2\lambda^2 [(1+\sqrt{d})^2 \\ &+ m(1-\sqrt{d})^2] + 4\sqrt{d}\, m\lambda^2\lambda_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{58}$$

oder

$$\frac{x^2}{\bar{\lambda}^2} - \frac{y^2}{\bar{\lambda}_1^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{n\bar{\lambda}^2} + \frac{y^2}{n\bar{\lambda}_1^2} = 1. \tag{58a}$$

Die Achsen dieser Kegelschnitte sind also:

$$\bar{\lambda}^2 = k\lambda^2 \;\; ; \;\; \bar{\lambda}_1{}^2 = k\lambda_1{}^2,$$

$$n\bar{\lambda}^2 = n \,.\, k\lambda^2 \;\; ; \;\; n\bar{\lambda}_1{}^2 = n \,.\, k \,.\, \lambda_1{}^2,$$

wo die Größen k und n durch folgende Gleichungen definiert sind:

$$(59) \qquad k = \frac{4\sqrt{d}\,.\,m}{m(1+\sqrt{d})^2 + (1-\sqrt{d})^2}\,,$$

$$n = \frac{m(1+\sqrt{d})^2 + (1-\sqrt{d})^2}{m(1-\sqrt{d})^2 + (1+\sqrt{d})^2}\,.$$

Für $d = 0$ wird $k = 0$, $n = 1$; $\bar{\lambda}^2 = \bar{\lambda}_1{}^2 = 0$. $d = 1$ liefert $k = 1$, $n = m$; die kovarianten Kegelschnitte fallen zusammen mit den Grundkegelschnitten. Soll das Doppelverhältnis von vier Tangenten an zwei Hyperbeln der Büschel das harmonische erster Art sein, dann ist der geometrische Ort für derartige Punkte zu finden für $d = -1$, und das gibt:

$$k = \frac{2m}{m-1}\,, \qquad n = -1\,.$$

Die beiden Kegelschnitte fallen also zusammen zu einem einzigen, der die Gleichung hat:

$$\frac{m-1}{2m}\left(\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda_1{}^2}\right) - 1 = 0\,.$$

Für die harmonische Kovariante zweiter Art ($d = 2$) ergeben sich die Größen:

$$k = \frac{4\sqrt{2}\,.\,m}{m\varepsilon_1{}^{-1} + \varepsilon_1}\,,$$

$$n = \frac{m\varepsilon_1{}^{-1} + \varepsilon_1}{m\varepsilon_1 + \varepsilon_1{}^{-1}}\,,$$

und diese Werte stimmen überein mit den früher[1]) gefundenen.

Legt man von einem Punkte einer Hyperbel eines der Büschel vier Tangenten an zwei andere Hyperbeln, deren reelle Achsen nicht zusammenfallen, so läßt sich der Wert des Doppelverhältnisses feststellen, in welchem diese vier Tangenten stehen. Bekannt sind λ, λ_1, m, $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_1$ und infolgedessen k. Aus der Gleichung (59) für k findet man dann:

---

[1]) Siehe S. 36.

$$\sqrt{d} = \frac{2m - k(m-1) + 2\sqrt{m(m+k)(1-k)}}{k(1+m)} . \tag{60}$$

Faßt man jeden Kegelschnitt der beiden Büschel als Erzeugnis seiner Tangenten auf, dann sind dieselben ähnlichen Hyperbeln dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda^2 u^2 - \lambda_1{}^2 v^2 - 1 &= 0 , \\ -m\lambda^2 u^2 + m\lambda_1{}^2 v^2 - 1 &= 0 . \end{aligned} \tag{57a}$$

Die allgemeine Kontravariantengleichung ist danach:

$$4(1+\delta)^2(\lambda^2u^2 - \lambda_1{}^2v^2 - 1)(-m\lambda^2u^2 + m\lambda_1{}^2v^2 - 1)$$
$$-(1-\delta)^2[(\lambda^2u^2 - \lambda_1{}^2v^2)(1-m) - 2]^2 = 0 ,$$

und die beiden Kegelschnitte, in die die Kurve zerfällt, haben in Linienkoordinaten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} (-\lambda^2u^2 + \lambda_1{}^2v^2)[(1+\sqrt{\delta})^2 + m(1-\sqrt{\delta})^2] + 4\sqrt{\delta} &= 0 , \\ (\lambda^2u^2 - \lambda_1{}^2v^2)[m(1+\sqrt{\delta})^2 + (1-\sqrt{\delta})^2] + 4\sqrt{\delta} &= 0 . \end{aligned} \tag{61}$$

In Punktkoordinaten lauten sie:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1{}^2x^2 - \bar{\lambda}^2y^2 - \bar{\lambda}^2\bar{\lambda}_1{}^2 &= 0 , \\ -\bar{\lambda}_1{}^2x^2 + \bar{\bar{\lambda}}^2y^2 - \nu\bar{\bar{\lambda}}^2\bar{\bar{\lambda}}_1{}^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{61a}$$

Dabei ist: $\bar{\bar{\lambda}}^2 = \varkappa\lambda^2$; $\bar{\bar{\lambda}}_1{}^2 = \varkappa\lambda_1{}^2$ und

$$\begin{aligned} \varkappa &= \frac{(1+\sqrt{\delta})^2 + m(1-\sqrt{\delta})^2}{4\sqrt{\delta}} , \\ \nu &= \frac{m(1+\sqrt{\delta})^2 + (1-\sqrt{\delta})^2}{m(1-\sqrt{\delta})^2 + (1+\sqrt{\delta})^2} . \end{aligned} \tag{62}$$

Ist $\delta = 0$, so wird $\varkappa = \infty$, $\nu = 1$; die Punkte, durch die alle Kontravarianten hindurchgehen, liegen im Unendlichen. Für $\delta = 1$ wird $\varkappa = 1$ und $\nu = m$; die Grundkegelschnitte sind selbst ihre Kontravarianten vom Doppelverhältnis 1. Die harmonische Kontravariante erster Art besteht nur aus einem Kegelschnitt, denn es wird für $\delta = -1$:

$$\varkappa = \frac{1-m}{2} ; \qquad \nu = -1 ,$$

sodaß der kontravariante Kegelschnitt die Gleichung hat:

$$\frac{2x^2}{(1-m)\lambda^2} - \frac{2y^2}{(1-m)\lambda_1{}^2} - 1 = 0 .$$

Je nachdem $m \gtrless 1$ ist, fällt die reelle Achse dieser Hyperbel in die x-Achse oder in die y-Achse des Koordinatensystems. Für die harmonische Kontravariante zweiter Art gelten die Gleichungen:

$$\varkappa = \frac{\varepsilon_1^{-1} + m\,\varepsilon_1}{4\sqrt{2}} ,$$

$$\nu = \frac{m\,\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1}{m\,\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1}} .$$

Sind zwei Hyperbeln des Systems gegeben, dann läßt sich das Doppelverhältnis, in dem eine Tangente einer andern Hyperbel diese beiden Kegelschnitte schneidet, berechnen aus der Gleichung:

$$(63) \qquad \sqrt{\delta} = \frac{2\,\varkappa + m - 1 \pm 2\sqrt{(m+\varkappa)\,(\varkappa - 1)}}{m+1} ,$$

wobei $\varkappa$ der Quotient der Quadrate der in derselben Koordinatenachse liegenden Hyperbelachsen wird.

Sind die Kovarianten zweier Hyperbeln des Systems bekannt, so lassen sich in einfacher Weise die entsprechenden Kontravarianten vom selben Doppelverhältnis finden und umgekehrt, denn zwischen den beiden Kurvenarten bestehen, wenn $d = \delta$ ist, folgende Beziehungen:

$$n = \nu = \frac{m\,(1+\sqrt{d})^2 + (1-\sqrt{d})^2}{m\,(1-\sqrt{d})^2 + (1+\sqrt{d})^2} ,$$

$$\varkappa = \frac{m}{k \cdot n} ; \qquad k = \frac{m}{\varkappa \cdot n} ,$$

(63)

$$\bar{\bar{\lambda}}^2 = \varkappa \cdot \lambda^2 = \frac{m}{k \cdot n}\lambda^2 = \frac{m}{k^2 \cdot n}\bar{\lambda}^2 ,$$

$$\bar{\bar{\lambda}}_1^{\,2} = \varkappa \cdot \lambda_1^{\,2} = \frac{m}{k \cdot n}\lambda_1^{\,2} = \frac{m}{k^2 \cdot n}\bar{\lambda}_1^{\,2} .$$

Die Verhältnisse in den Büscheln ähnlicher Hyperbeln werden vereinfacht, wenn $m = 1$ ist, d. h. wenn konjugierte Hyperbeln vorliegen. Dann wird:

$$k = \frac{2\sqrt{d}}{1+d} , \qquad \varkappa = \frac{1+\delta}{2\sqrt{\delta}} ,$$

$$n = 1 , \qquad \nu = 1 .$$

Auch die kovarianten und kontravarianten Hyperbeln sind also konjugiert, und man findet den Satz:

In einem Büschel konjugierter Hyperbeln sind diejenigen, deren Achsen das $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$ *fache der Achsen zweier Hyperbeln des Büschels sind, die harmonische Kovariante zweiter Art, diejenigen, deren Achsen das* $\sqrt{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$ *fache sind, die harmonische Kontravariante zweiter Art*

der betrachteten Hyperbeln. Es gibt keinen Kegelschnitt des Büschels, der harmonische Kovariante oder Kontravariante erster Art zu zwei andern Hyperbeln des Büschels sein könnte.

Besteht das System der Kegelschnitte aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, ist also $\lambda^2 = \lambda_1^2$, so wird auch

$$\overline{\lambda}^2 = \overline{\lambda}_1^2 \text{ und } \overline{\overline{\lambda}}^2 = \overline{\lambda}_1^2 .$$

Nur für zwei besondere Kurven des Büschels gilt eine einfache Beziehung zwischen den Polarreziproken mit der Leitkurve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ der Kovarianten und den Kontravarianten und umgekehrt. Ist nämlich $m = 1$ und $\lambda^2 = \lambda_1^2 = 1$, dann findet man das Ergebnis:

Die Polarreziproken der Kovarianten in bezug auf die Leitkurve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ der beiden Hyperbeln $x^2 - y^2 - 1 = 0$ und $-x^2 + y^2 - 1 = 0$ sind die Kontravarianten dieser Kurven und umgekehrt.

Verzeichnis der Figuren.

Zu § 1.	Figur 1:	$b^2 < a^2 < (3 + 2\sqrt{2})\, b^2$
	Figur 2:	$(3 + 2\sqrt{2})\, b^2 < a^2 < (3 + 2\sqrt{2})^2\, b^2$
	Figur 3:	$a^2 > (3 + 2\sqrt{2})^2\, b^2$
Zu § 2.	Figur 4:	$0 < a_1 < (3 - 2\sqrt{2})\, a$
	Figur 5:	$(3 - 2\sqrt{2})\, a < a_1 < a$
	Figur 6:	$a_1 = a$
	Figur 7:	$a < a_1 < (3 + 2\sqrt{2})\, a$
	Figur 8:	$a_1 > (3 + 2\sqrt{2})\, a$
Zu § 3.	Figur 9:	$a^2 b^2{}_1 < (3 - 2\sqrt{2})^2\, a_1{}^2 b^2$
	Figur 10:	$(3 - 2\sqrt{2})^2 a_1{}^2 b^2 < a^2 b_1{}^2 < a_1{}^2 b^2$
	Figur 11:	$a^2 b_1{}^2 = a_1{}^2 b^2$
	Figur 12:	$a_1{}^2 b^2 < a^2 b_1{}^2 < (3 + 2\sqrt{2})^2 a_1{}^2 b^2$
	Figur 13:	$a^2 b_1{}^2 > (3 + 2\sqrt{2})^2 a_1{}^2 b^2$
Zu § 5.	Figur 14:	$b^2 < a^2 < (3 + 2\sqrt{2}) b^2$, wie bei Figur 1

Bei jeder Figur ist die ausgezogene Kurve die harmonische Kovariante zweiter Art, die strichpunktierte Kurve die harmonische Kovariante erster Art der beiden Grundkegelschnitte, die gestrichelt dargestellt sind.

Inhaltsübersicht.

Seite.

Einleitung 1

Abschnitt I.

Drei Fälle der harmonischen Kovarianten zweier Kegelschnitte.

§ 1. Die Grundkegelschnitte sind zwei konzentrische kongruente Ellipsen, deren Achsen um 90^0 gegen einander gedreht sind 4

§ 2. Die Grundkegelschnitte sind eine Ellipse und eine Hyperbel mit gemeinsamem Mittelpunkt und gleichen Hauptachsenrichtungen 20

§ 3 Die Grundkegelschnitte sind zwei konzentrische Hyperbeln, deren reelle Achsen einen rechten Winkel mit einander bilden 30

Abschnitt II.

Kovarianten und Kurven vierter Ordnung.

§ 4. Die Kovarianten als Individuen von Kurvenbüscheln 39

§ 5. Die Kovarianten als Hüllkurven von Kegelschnitten . 43

§ 6. „Charakteristischer Wert“ für die Kovarianten . . . 44

Abschnitt III.

Kovarianten und Kontravarianten zweier Kegelschnitte.

§ 7. Allgemeine Definitionen und Sätze für Kontravarianten . 46

§ 8. Kovarianten und Kontravarianten zweier kongruenten konzentrischen Ellipsen 47

§ 9. Kovarianten und Kontravarianten eines Systems sich in den festen Hauptscheiteln berührender Ellipsen und Hyperbeln 49

§ 10. Kovarianten und Kontravarianten zweier konzentrischen Büschel ähnlicher Hyperbeln, deren Achsen einen rechten Winkel bilden 54

Verzeichnis der Figuren 58

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Margarete Charlotte Platen, am 1. Mai 1894 in Eilenburg als Tochter des Lehrers und Kantors Max Platen und seiner Frau Margarete geb. Geißler. Ich bin evangelischer Konfession und gehöre dem preußischen Staate an. Von Ostern 1900 an besuchte ich die achtklassige Bürgerschule meiner Vaterstadt, darauf das Lyzeum und Oberlyzeum der Franckeschen Stiftungen zu Halle a. d. S. Ostern 1913 bestand ich die Reifeprüfung des Oberlyzeums, Ostern 1914 die Lehramtsprüfung, und im Herbst 1917 erwarb ich das Reifezeugnis einer Oberrealschule durch eine Ergänzungsprüfung an der Guericke — Oberrealschule zu Magdeburg. Von Ostern 1914 ab studierte ich in Marburg, München und Halle Mathematik und Naturwissenschaften.

Meine Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten in Marburg:

v. Auwers, Hellinger, Hensel, Richarz;

in München:

Fischer, Hartogs, Kehrer, Pfänder, Röntgen, Schmitz, Wieland;

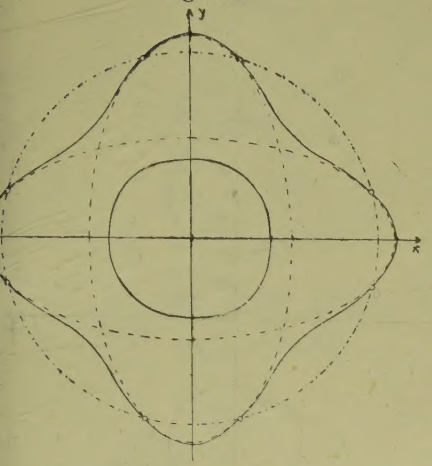
in Halle:

Dorn, Eberhard, Frischeisen-Köhler, Grammel, Gutzmer, Haseloff, Herweg, Menzer, Schenck, Schmidt, Schulze, Scupin, Tubandt, Waetzoldt, Walther, Wangerin, Ziehen.

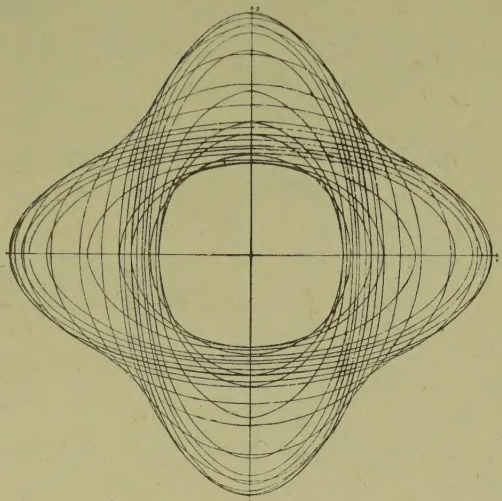
Allen meinen verehrten Lehrern bin ich zu dauerndem Danke verpflichtet.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer Herrn Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer, dessen Assistentin ich während einiger Semester gewesen bin, auch an dieser Stelle ergebenst und aufrichtig zu danken für das liebenswürdige Interesse, das er meinem Studium während meines Hallenser Aufenthaltes stets entgegenbrachte. Ganz besonderen Dank bin ich Herrn Geheimrat Gutzmer schuldig für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für die mannigfachen Ratschläge, durch die er ihre Ausarbeitung wesentlich gefördert hat.

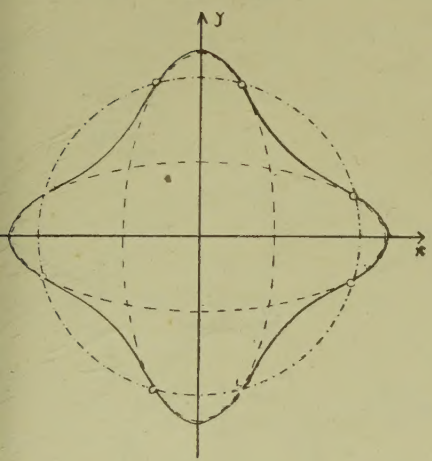
Figur 1.



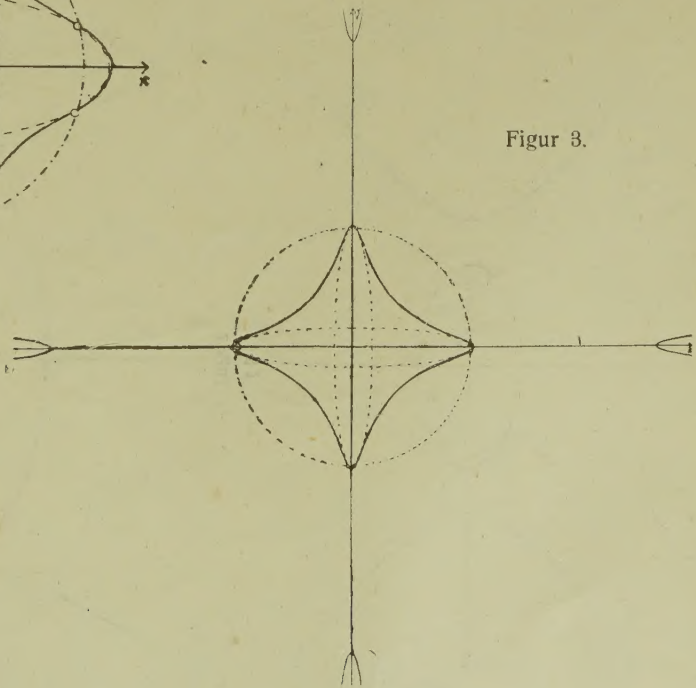
Figur 14.



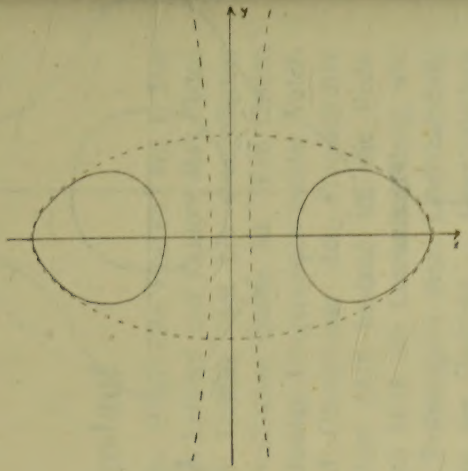
Figur 2.



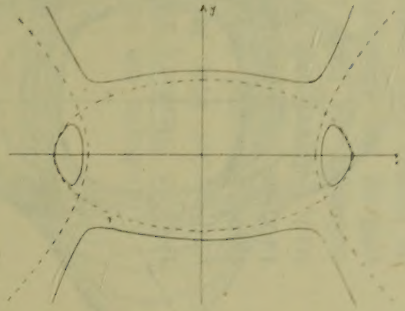
Figur 3.

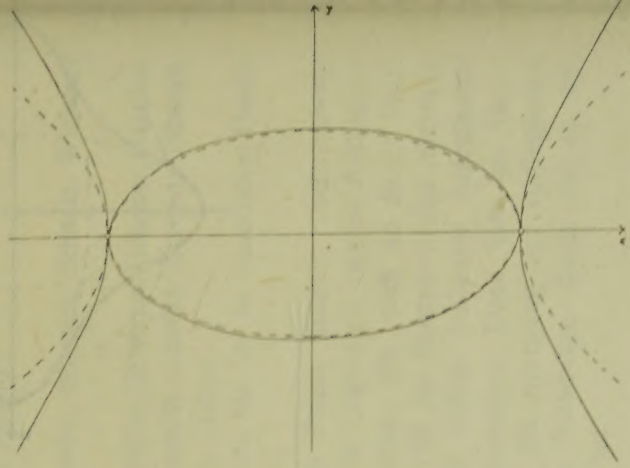


Figur 4.

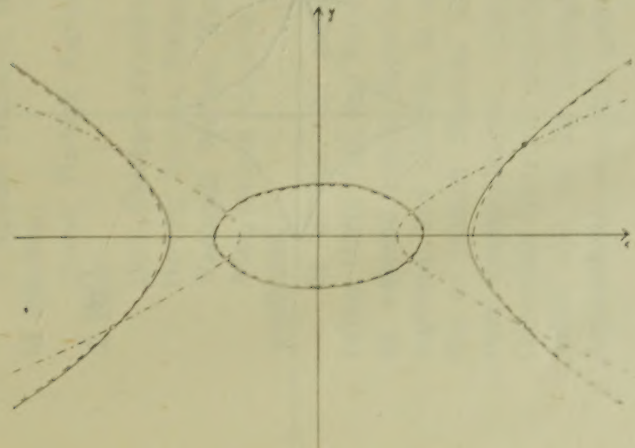


Figur 5.

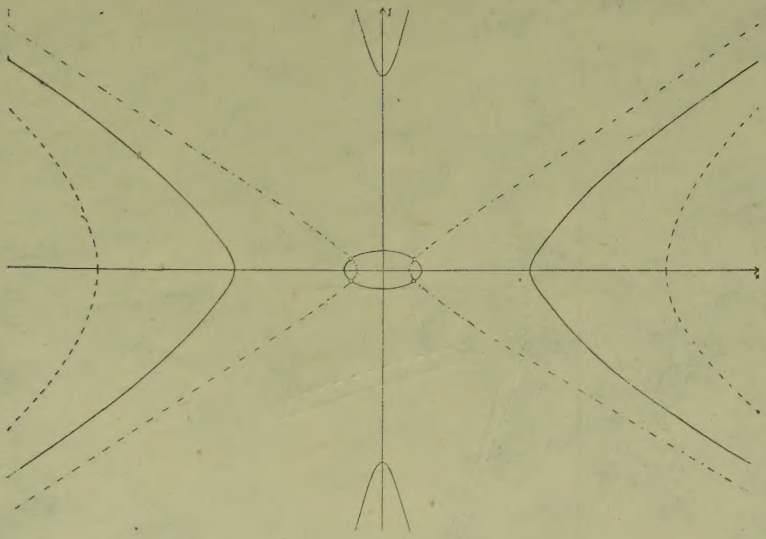




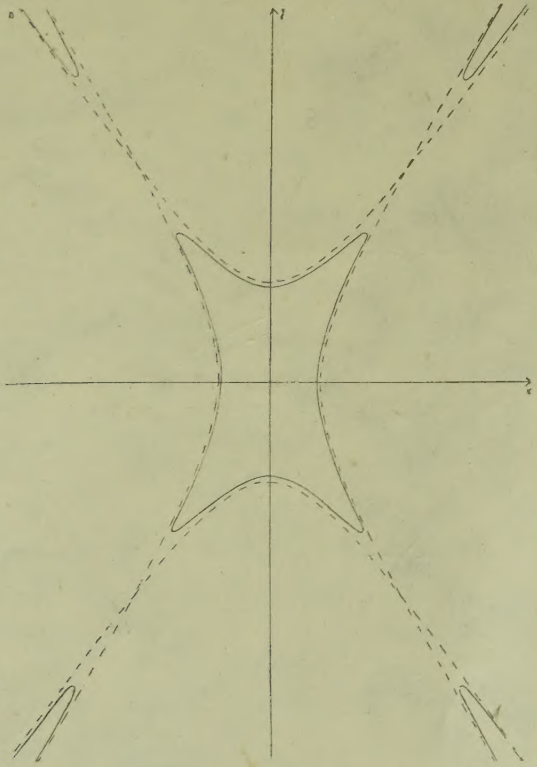
Figur 7.



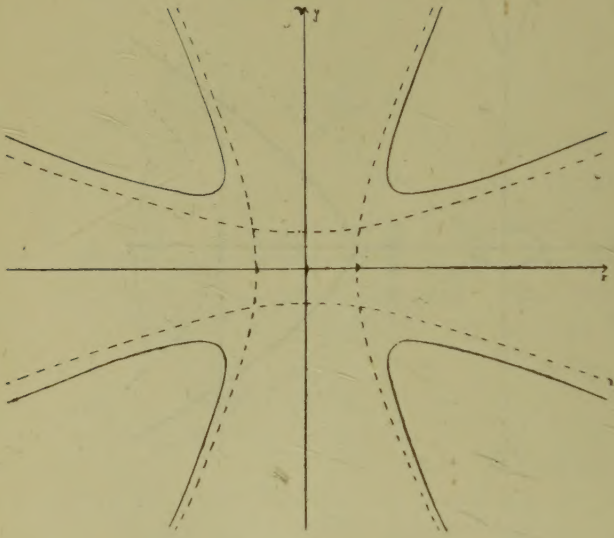
Figur 8.



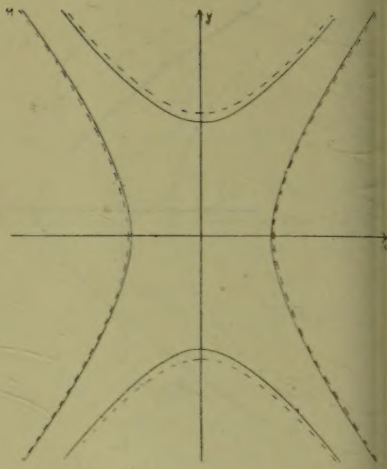
Figur 10.



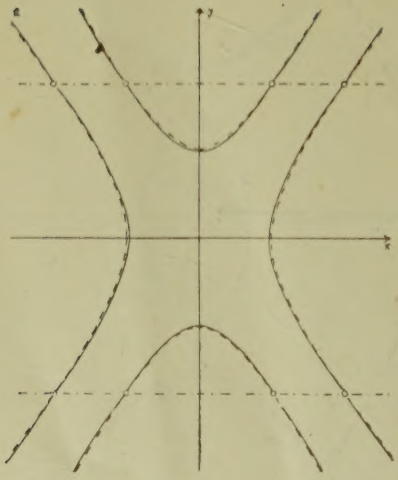
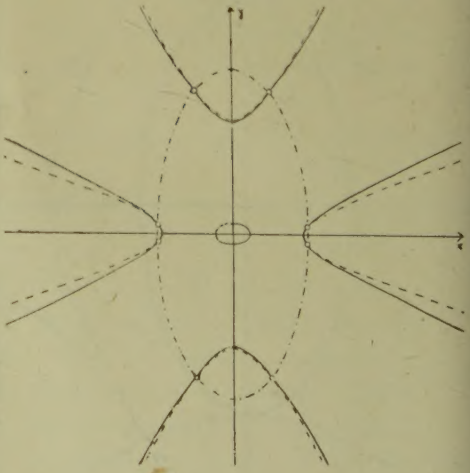
Figur 9.



Figur 11.



Figur 12.



Figur 13.